

Isomorphie harmonischer Räume

von

Ursula Schirmeler

aus

Nürnberg

Isomorphie harmonischer Räume

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt

von

Ursula Schirmeier

aus

Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:

4. 2. 1976

Vorsitzender der Promotionskommission:	Professor Dr. H. Remmert
Erstberichterstatter:	Professor Dr. H. Bauer
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. D. Kölzow

Inhalt

=====

Einleitung	1
§ 1. Einbettung harmonischer Räume	3
§ 2. Struktur der Einbettung	20
§ 3. Differenzierbarkeit einer harmonischen Abbildung	30
§ 4. Isomorphie der Kegel der (feinen) reellwertigen Potentiale	33
Literatur	40



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546226_0094

Einleitung

=====

Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Übertragung des Satzes von Banach-Stone in die axiomatische Potentialtheorie.

Dieser Satz besagt, daß zwei kompakte Räume X und $\tilde{X}$ schon dann homöomorph sind, wenn die Ringe der stetigen Funktionen auf X und $\tilde{X}$ isometrisch isomorph sind. Seit langem sind in der Funktionentheorie analoge Aussagen bekannt: Nach einem Satz von Bers sind zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ (bis auf Konjugation) konform äquivalent, wenn die zugehörigen Ringe der holomorphen Funktionen isomorph sind. Ein Isomorphismus φ zwischen den Algebren $\mathcal{K}(X)$ und $\mathcal{K}(\tilde{X})$ aller meromorphen Funktionen auf zwei kompakten Riemannschen Flächen X und $\tilde{X}$ mit $\varphi(1) = 1$ induziert eine biholomorphe Abbildung $\psi: \tilde{X} \longrightarrow X$ mit $\varphi(h) = h \circ \psi$ für alle $h \in \mathcal{K}(X)$.

In der Theorie der harmonischen Räume erweist es sich als zweckmäßig, die Rolle der Funktionenalgebren geeigneten Unterkegeln der Potentialkegel zuzuweisen. An die Stelle der Homöomorphie bzw. biholomorphen Abbildung tritt dann eine biharmonische Abbildung (vgl. Definition (1.4)).

In § 1. beweisen wir ein entsprechendes Ergebnis für $\mathcal{C}$ -kompakte, $\mathcal{P}$ -harmonische Räume in dem folgenden, etwas allgemeineren Rahmen: Ausgehend von einem Kegelepimorphismus φ (vgl. Definition (1.1)) des Kegels $\mathcal{P}^{\mathcal{C}}$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale des harmonischen Raumes $(X, \mathcal{H}^*)$ auf den entsprechenden Kegel $\tilde{\mathcal{P}}^{\mathcal{C}}$ des Raumes $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$, wird der harmonische Raum $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*_{\tilde{f}})$ in den Raum $(X, \mathcal{H}^*)$ eingebettet. Dabei bezeichnet $\tilde{f}$ eine geeignete, strikt positive, stetige Funktion auf $\tilde{X}$; das Garbendatum $\tilde{\mathcal{H}}^*_{\tilde{f}}$ entsteht aus $\tilde{\mathcal{H}}^*$ durch Division mit $\tilde{f}$.

Der zweite Paragraph beschreibt die Struktur dieser Einbettung genauer; im dritten Paragraphen werden Differenzierbarkeitseigenschaften von harmonischen Abbildungen zwischen offenen Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$ und $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) unter Heranziehung der Ergebnisse von J.-M. Bony bewiesen, sofern alle auftretenden harmonischen Funktionen genügend oft differenzierbar sind.

Schließlich wenden wir uns in § 4. wieder der ursprünglichen Aufgabenstellung zu - diesmal für den Fall der Kegel aller reellwertigen Potentiale bzw. aller reellwertigen feinen Potentiale eines harmonischen Raumes mit Dominationsaxiom. Dabei besteht der entscheidende Schritt in dem Nachweis, daß der Kegel der (feinen) Potentiale eines solchen harmonischen Raumes $(X, \mathcal{H}^*)$ nicht nur die feine, sondern sogar die Ausgangstopologie von X eindeutig bestimmt. Insbesondere wird hieraus folgen, daß die feine harmonische Struktur den harmonischen Raum selbst eindeutig kennzeichnet.

Den Herren K. Janßen und C. Portenier danke ich für mehrere hilfreiche Hinweise. Weitere Anregungen erhielt ich durch Vorträge anlässlich einer Tagung über Potentialtheorie in Oberwolfach 1974 und ein Gespräch mit Herrn Professor C. Constantinescu.

Besonders möchte ich mich bei Herrn Professor Heinz Bauer für das Thema, die vielen Denkanstöße und für sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit bedanken.

§ 1. Einbettung harmonischer Räume

Im folgenden bezeichnen $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ zwei harmonische Räume.

Die hier verwendeten Bezeichnungen und Begriffe sind - wenn nichts Gegenteiliges gesagt ist - die des Buches [CC]; einige Symbole (wie zum Beispiel $\mathcal{P}(X)$, μ_X^V , $\hat{R}_F^A$) werden jedoch, wenn sie sich auf den Raum $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ beziehen, mit einer $\sim$ versehen ($\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{X})$, $\tilde{\mu}_X^V$, $\hat{\tilde{R}}_F^A$).

- (1.1) Definition. Seien P bzw. $\tilde{P}$ inf-stabile, konvexe Unterkegel der Potentialkegel $\mathcal{P}(X)$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{X})$ von $(X, \mathcal{H}^*)$ bzw. $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$.

Ein Kegelepimorphismus von P auf $\tilde{P}$ ist eine additive, positiv-homogene Surjektion

$$\varphi : P \longrightarrow \tilde{P}$$

mit $\varphi(\inf(p, q)) = \inf(\varphi(p), \varphi(q))$ für alle $p, q \in P$.

Ist φ zusätzlich injektiv, so heißt φ ein Kegelisomorphismus.

(1.2) Bemerkungen.

- (1) Als Unterkegel P und $\tilde{P}$ werden im folgenden hauptsächlich die Kegel $\mathcal{P}_R$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}_R$ aller reellwertigen Potentiale, die Kegel $\mathcal{P}^C := \mathcal{P}_R \cap \mathcal{C}(X)$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}^C := \tilde{\mathcal{P}}_R \cap \mathcal{C}(\tilde{X})$ aller stetigen, reellwertigen und die Kegel $\mathcal{P}^f$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}^f$ aller feinen, reellwertigen Potentiale auf X bzw. $\tilde{X}$ auftreten.

- (2) Enthalten die Kegel P und $\tilde{P}$ nur reellwertige Potentiale, so sind $E := P - P$ und $\tilde{E} := \tilde{P} - \tilde{P}$ Vektorverbände bezüglich der punktweisen Ordnung (wegen $\sup(p - q, 0) = p - \inf(p, q)$ für alle $p, q \in P$). Der Kegelepimorphismus φ läßt sich dann durch die Festsetzung

$$\varphi'(p - q) := \varphi(p) - \varphi(q) \quad \text{für } p, q \in P$$

zu einer linearen Surjektion

$$\varphi' : E \longrightarrow \tilde{E}$$

fortsetzen, welche

$\varphi'(\sup(p - q, 0)) = \varphi(p) - \varphi(\inf(p, q)) = \varphi(p) - \inf(\varphi(p), \varphi(q)) = \sup(\varphi(p) - \varphi(q), 0) = \sup(\varphi'(p - q), \varphi'(0)) \quad (p, q \in P)$
erfüllt, also ein linearer Verbandshomomorphismus ist.

- (3) Mit φ ist auch φ^{-1} ein Kegelisomorphismus.
- (4) $\varphi : P \longrightarrow \tilde{P}$ ist genau dann ein Kegelisomorphismus, wenn φ bijektiv, additiv, positiv-homogen und isoton bezüglich der natürlichen Ordnung ist.
- (5) Für jede aufsteigend filtrierende Familie $(p_i)_{i \in I}$ in P mit $p := \sup_{i \in I} p_i \in P$ ist $\sup_{i \in I} \varphi(p_i) \leq \varphi(p)$.

Gleichheit gilt hierbei sicher dann, wenn φ bijektiv ist. Mit nicht-algebraischen Hilfsmitteln kann - wie sich aus (1.12) ergeben wird - in obiger Situation $\sup_{i \in I} \varphi(p_i) = \varphi(\sup_{i \in I} p_i)$ auch für nicht-injektive Abbildungen φ erreicht werden, falls $P = \mathcal{P}^C$ und $\tilde{P} = \tilde{\mathcal{P}}^C$ ist.

Das folgende Beispiel soll zeigen, welche Ergebnisse bei nicht-injektivem φ erwartet werden können; in Satz (1.12) werden wir sehen, daß die Situation des Beispiels typisch ist.

- (1.3) Beispiel. Seien $X :=]-\infty, 1[$, $\tilde{X} := [0, 1[$.
 $(X, \mathcal{H}^*)$ bezeichne den $\mathcal{P}$ -harmonischen Raum der Lösungen der Laplace-Gleichung. Für jede offene, zusammenhängende Menge $U \subset [0, 1[$ mit $0 \in U$ bzw. $0 \notin U$ sei $\tilde{\mathcal{H}}^*(U)$ die Menge aller antitonen, konkaven Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (d.h. $\tilde{\mathcal{H}}^*(U)$ enthält nur die Konstanten) bzw. $\tilde{\mathcal{H}}^*(U) = \mathcal{H}^*(U)$.

Die Restriktionsabbildung

$$\varphi : \mathcal{P}^C \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}^C$$

ist surjektiv. $\tilde{\mathcal{P}}^C$ besteht nämlich aus den stetigen, antitonen, konkaven Funktionen $\tilde{p} : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{x \rightarrow 1} \tilde{p}(x) = 0$. Jedes solche Potential $\tilde{p}$ ist Restriktion des durch

$$p(x) := \begin{cases} \tilde{p}(x) & \text{für } x \in [0, 1[\\ \tilde{p}(0) & \text{für } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

definierten Potentials $p \in \mathcal{P}^C$.

$(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ kann jedoch nicht als Unterraum von $(X, \mathcal{H}^*)$ aufgefaßt werden, wohl aber $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*|_{\tilde{X}})$; d. h. es ist

$$\tilde{\mathcal{H}}^*|_{[0, 1[} = \mathcal{H}^*|_{[0, 1[}.$$

Insbesondere ist die natürliche Einbettungsabbildung

$j : ([0, 1[, \tilde{\mathcal{H}}^*]_{[0, 1[}) \longrightarrow (X, \mathcal{H}^*)$ eine harmonische Abbildung im Sinne der folgenden

(1.4) Definition. Seien $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ zwei harmonische Räume. Eine stetige Abbildung $\Psi : X \longrightarrow \tilde{X}$ heißt harmonische Abbildung, falls für jede offene Menge $\tilde{U} \subset \tilde{X}$

$$\tilde{\mathcal{H}}^*(\tilde{U}) \circ \Psi := \{h \circ \Psi|_{\Psi^{-1}(\tilde{U})} : h \in \tilde{\mathcal{H}}^*(\tilde{U})\} \subset \mathcal{H}^*(\Psi^{-1}(\tilde{U}))$$

gilt.

Falls Ψ bijektiv ist und sowohl Ψ als auch die Umkehrabbildung Ψ^{-1} harmonische Abbildungen sind, so heißt Ψ eine biharmonische Abbildung.

(1.5) Bemerkungen.

- (1) In obiger Definition genügt es, sich auf Mengen $\tilde{U}$ einer topologischen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ von $\tilde{X}$ zu beschränken.
- (2) Eine Abbildung $\Psi : X \longrightarrow \tilde{X}$ ist genau dann biharmonisch, wenn Ψ eine offene, bijektive harmonische Abbildung ist (vgl. [CC], Theorem 2.1.1.).
- (3) Harmonische Abbildungen Ψ "transportieren" die harmonischen Funktionen; d. h. für jede offene Menge $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ und jedes $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{U})$ ist $\tilde{h} \circ \Psi|_{\Psi^{-1}(\tilde{U})} \in \mathcal{H}(\Psi^{-1}(\tilde{U}))$.

Umgekehrt ist jede stetige Abbildung Ψ mit dieser Eigenschaft harmonisch, sofern nur $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ eine Basis regulärer Mengen besitzen (vgl. [CC₁], Theorem 3.1.). Unsere Definition einer harmonischen Abbildung verträgt sich also mit der in [CC₁].

- (4) Sei nun speziell $\tilde{X} := \mathbb{R}$, versehen mit der klassischen, zur Laplace-Gleichung gehörigen harmonischen Struktur. Die harmonischen Abbildungen $\Psi : X \longrightarrow \tilde{X}$ stimmen genau dann mit den global definierten harmonischen Funktionen auf X überein, wenn $\mathcal{H}$ die Konstanten enthält.

Ist nämlich Ψ eine harmonische Abbildung im Sinne unserer Definition, so ist nach (3) die Funktion $\Psi = \text{id} \circ \Psi \in \mathcal{H}(X)$, sowie $1 = 1 \circ \Psi \in \mathcal{H}(X)$.

Sei umgekehrt Ψ eine global definierte harmonische Funktion auf X . Jede hyperharmonische Funktion $\tilde{h} \neq \infty$ auf einem offenen Intervall $\tilde{U} \subset \mathbb{R}$ ist Infimum einer Familie

$(\tilde{h}_a)_{a \in I}$ von affin-linearen Funktionen auf $\tilde{U}$. Falls nun $\mathcal{H}$ die Konstanten enthält, ist für jedes $a \in I$ dann $\tilde{h}_a \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})} \in \mathcal{H}(\psi^{-1}(\tilde{U}))$, d.h.

$$\tilde{h} \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})} = \inf_{a \in I} \tilde{h}_a \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})} \in \mathcal{H}^*(\psi^{-1}(\tilde{U})).$$

Dies bedeutet gerade, daß ψ eine harmonische Abbildung ist.

Wir gehen nun aus von einem Kegelepimorphismus φ zwischen den Kegeln $\mathcal{P}^C$ und $\tilde{\mathcal{P}}^C$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale zweier δ -kompakter, $\mathcal{P}$ -harmonischer Räume $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ mit $1 \in \mathcal{P}^C$ und $\varphi(1) = 1$.

Die gesuchte, zu φ gehörige Einbettungsabbildung $\psi: \tilde{X} \longrightarrow X$ (d.h. ψ soll mit φ durch die Eigenschaft $\varphi(p) = p \circ \psi$ für alle Potentiale $p \in \mathcal{P}^C$ verknüpft sein) wird sich als Restriktion der transponierten Abbildung

$$\varphi^*: \tilde{F} \longrightarrow F$$

des Ordnungsdualraumes $\tilde{F}$ von $\tilde{\mathcal{P}}^C - \tilde{\mathcal{P}}^C$ auf den Ordnungsdualraum F von $\mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C$ auf den Zustandsraum $\mathcal{E}(\tilde{X}) := \{\tilde{\varepsilon}_{\tilde{X}} : \tilde{x} \in \tilde{X}\}$ herausstellen.

Zum Nachweis, daß φ^* die Menge $\mathcal{E}(\tilde{X})$ in die entsprechende Menge $\mathcal{E}(X)$ abbildet, wird die Theorie der adaptierten Räume herangezogen. Es gilt nämlich das

(1.6) Lemma. $E := \mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C$ ist ein adaptierter Raum ([Ch], Définition p. 4). Genauer gilt:

- (1) Zu jedem $x \in X$ existiert ein $p \in \mathcal{P}^C$ mit $p(x) \neq 0$.
- (2) Der Kegel $\mathcal{P}^C$ erzeugt E .
- (3) Zu jedem $f \in E_+$ existiert ein $g \in \mathcal{P}^C$ mit $f \leq g$ derart, daß für jedes $k > 0$ die Menge $\{g < k \cdot f\}$ relativ-kompakt ist.

Beweis. Die $\mathcal{P}$ -Harmonizität von $(X, \mathcal{H}^*)$ ist gleichwertig mit der Eigenschaft (1).

Nach Definition ist (2) erfüllt.

Die Eigenschaft (3) braucht nur für Funktionen f in $\mathcal{P}^C$ nachgewiesen werden; sie ist dann unter Beachtung der δ -Kompaktheit von X eine unmittelbare Folge von [CC] Prop. 2.2.4.

Nach Bemerkung (1.2.2) ist E mit der natürlichen Ordnung ein Vektorverband. Auf E sind alle Funktionale der Form $\beta \cdot \varepsilon_x$ mit $x \in X$, $\beta \in \mathbb{R}_+$ lineare Verbandshomomorphismen. Mit Hilfe von (1.6) läßt sich umgekehrt zeigen:

(1.7) Lemma. Zu jedem linearen Verbandshomomorphismus $\neq 0$

$$\lambda : \mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert genau ein $\beta > 0$ und genau ein $x \in X$ mit $\lambda = \beta \cdot \varepsilon_x$.

Beweis. Nach [J], Theorem 1.8.1. liegt jeder von Null verschiedene Verbandshomomorphismus $\lambda : \mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem Extremalstrahl des positiven Kegels des Dualraumes $(\mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C)_+^*$; wegen (1.6) und [Ch], Proposition 3, ist λ dann aber von der Form $\lambda = \beta \cdot \varepsilon_x$ mit $\beta > 0$ und $x \in X$. Da die Funktionen in $\mathcal{P}^C$ die Punkte von X verschränkt trennen, folgt die Eindeutigkeit der Darstellung von λ .

(1.8) Lemma. Ist $p \in \mathcal{P}^C$ strikt positiv, so auch $\varphi(p)$.

Beweis. Nach (1.2.2) ist die lineare Fortsetzung φ' von φ auf $E := \mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C$ ein linearer Verbandshomomorphismus; also trifft dies auch für jedes Funktional $\varepsilon_{\tilde{x}} \circ \varphi'$ ($\tilde{x} \in \tilde{X}$) zu. Nach (1.7) ist ein Potential $p \in \mathcal{P}^C$ genau dann strikt positiv, wenn für jeden von Null verschiedenen linearen Verbandshomomorphismus $\lambda : E \longrightarrow \mathbb{R}$ der Wert $\lambda(p) > 0$ ist. Für ein solches Potential aber gilt in jedem Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ auch $\varphi(p)(\tilde{x}) = (\varepsilon_{\tilde{x}} \circ \varphi')(p) > 0$.

(1.9) Lemma. Sei $p_0 \in \mathcal{P}^C$ strikt positiv. Für je zwei Potentiale $p, q \in \mathcal{P}^C$ mit $p \geq q$ sind äquivalent:

$$(1) \quad p - q \in \mathcal{K}(X) .$$

$$(2) \quad \text{Zu jedem } u \in \mathcal{P}^C \text{ existiert ein } \beta \geq 0 \text{ derart, daß} \\ \text{für alle natürlichen Zahlen } n \text{ gilt} \\ \inf (n \cdot q + u, n \cdot p) \leq \beta \cdot p_0 + n \cdot q .$$

Beweis. Für jedes $u \in \mathcal{P}^C$ sei $f_u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \longmapsto \sup \{ \inf (n \cdot q + u, n \cdot p)(x) - n \cdot q(x) : n \in \mathbb{N} \},$$

$$\text{d.h. es ist } f_u = 1_{\{p \neq q\}} \cdot u .$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Aus (1) folgt, daß die Menge $L := \{x \in X : p(x) \neq q(x)\}$ relativ-kompakt ist. Daher ist für jedes $u \in \mathcal{P}^C$ die Funktion f_u nach oben beschränkt, etwa $f_u \leq M \in \mathbb{R}_+$, und $b := \inf p_0(L)$ ist strikt positiv.

Für $\beta := \frac{M}{b} \in \mathbb{R}_+$ gilt dann $f_u \leq \beta \cdot p_0$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\inf (n \cdot q + u, n \cdot p) \leq \beta \cdot p_0 + n \cdot q.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Nach (1.6.3) existiert zu p_0 ein Potential $u \in \mathcal{P}^C$ derart, daß für jedes $\alpha > 0$ die Menge $\{x \in X : u(x) < \alpha \cdot p_0(x)\}$ relativ-kompakt ist.

Sei nun β gemäß (2) so gewählt, daß $f_u \leq \beta \cdot p_0$, d.h. $X = \{f_u < (\beta + 1) \cdot p_0\}$ gilt.

Wegen

$$\{p \neq q\} \subset \{f_u = u\} \subset K := \{u < (\beta + 1) \cdot p_0\}$$

und der relativen Kompaktheit von K ergibt sich die Behauptung.

(1.10) Lemma. Für alle Potentiale $p, q \in \mathcal{P}^C$ mit $p - q \in \mathcal{K}(X)_+$ ist $\varphi(p) - \varphi(q) \in \mathcal{K}(\overset{\vee}{X})_+$.

Beweis. Da X $\mathcal{G}$ -kompakt ist, existiert (z.B. wegen [CC] Prop. 2.2.2.) ein strikt positives Potential $p_0 \in \mathcal{P}^C$, dessen Bild $\varphi(p_0)$ wegen Lemma (1.8) ebenfalls strikt positiv ist.

Die Behauptung folgt dann aus Lemma (1.9) und der Surjektivität von φ .

(1.11) Bemerkungen.

- (1) Sei f eine strikt positive, stetige Funktion auf X .
Mit $\mathcal{K}_f^*$ bezeichnen wir das Garbendatum

$$U \longmapsto \mathcal{K}_f^*(U) := \left\{ \frac{h}{f}|_U : h \in \mathcal{K}^*(U) \right\} \quad (U \text{ offen in } X),$$

mit $\mathcal{P}_f^C$ den zu $(X, \mathcal{K}_f^*)$ gehörigen Kegel aller stetigen, reellwertigen Potentiale.

Mit $(X, \mathcal{K}^*)$ ist auch $(X, \mathcal{K}_f^*)$ ein $\mathcal{P}$ -harmonischer Raum und

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}^C &\longrightarrow \mathcal{P}_f^C \\ p &\longmapsto \frac{p}{f} \end{aligned}$$

ein Kegelisomorphismus.

Es existiert aber im Falle $\mathcal{K}_f^* \neq \mathcal{K}^*$ keine biharmonische Abbildung zwischen $(X, \mathcal{K}^*)$ und $(X, \mathcal{K}_f^*)$.

- (2) In einem G -kompakten, $\mathcal{P}$ -harmonischen Raum $(X, \mathcal{K}^*)$ existiert stets ein strikt positives, stetiges Potential p . Indem man zu dem Raum $(X, \mathcal{K}_p^*)$ übergeht, kann man immer erreichen, daß die positiven Konstanten Potentiale sind.

Im Hinblick auf (1) erscheint es nötig, den auftretenden Kegelepimorphismus zu normieren, etwa durch die Forderung, daß er die 1 auf die 1 abbildet.

Da nach (1.8) mit $p \in \mathcal{P}^C$ auch $\varphi(p)$ strikt positiv ist, ist die Voraussetzung $1 \in \mathcal{P}^C$ und $\varphi(1) = 1$ in dem folgenden Satz keine Einschränkung der Allgemeinheit.

(1.12) Satz. Seien $(X, \mathcal{K}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{K}}^*)$ zwei $\mathcal{G}$ -kompakte, $\mathcal{P}$ -harmonische Räume und sei

$$\varphi: \mathcal{P}^C \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}^C$$

ein Kegelepimorphismus mit $1 \in \mathcal{P}^C$ und $\varphi(1) = 1$. Dann existiert genau eine stetige, injektive Abbildung

$$\psi: \tilde{X} \longrightarrow X$$

mit $\varphi(p) = p \circ \psi$ für alle $p \in \mathcal{P}^C$.

Ferner gilt:

- (1) ψ ist eine Homöomorphie von $\tilde{X}$ auf $\psi(\tilde{X})$.
- (2) $\psi(\tilde{X})$ ist abgeschlossen in X .
- (3) Das Innere X' von $\psi(\tilde{X})$ ist entweder leer, oder
 $\psi|_{\psi^{-1}(X')} : \psi^{-1}(X') \longrightarrow X'$

vermittelt eine biharmonische Abbildung zwischen den Räumen $(\psi^{-1}(X'), \tilde{\mathcal{K}}^*|_{\psi^{-1}(X')})$ und $(X', \mathcal{K}^*|_{X'})$.

Beweis. 1. Schritt : Existenz und Eindeutigkeit der Injektion ψ .

Seien F bzw. $\tilde{F}$ die Ordnungsdualräume von $E := \mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C$ bzw. von $\tilde{E} := \tilde{\mathcal{P}}^C - \tilde{\mathcal{P}}^C$, d.h. $F = E_+^* - E_+^*$. Versieht man F und $\tilde{F}$ mit den schwachen Topologien $\mathcal{G}(F, E)$ bzw. $\mathcal{G}(\tilde{F}, \tilde{E})$, so ist die transponierte Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*: \tilde{F} &\longrightarrow F \\ \lambda &\longmapsto \lambda \circ \varphi \end{aligned}$$

stetig und injektiv. Dabei bezeichnet wieder φ' die Fortsetzung von φ auf E .

Zudem ist φ^* als Abbildung von $\tilde{F}$ auf $\varphi^*(\tilde{F})$ offen, also eine Homöomorphie. Wegen der Surjektivität von φ' bilden nämlich die Mengen

$$U := \bigcap_{i=1}^n \{ \tilde{\lambda} \in \tilde{F} : \tilde{\lambda}(\varphi'(p_i)) > a_i \}$$

($n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $p_1, \dots, p_n \in E$) eine Basis der Topologie von $\tilde{F}$; für jede solche Menge U aber ist

$$\begin{aligned} \varphi^*(U) &= \bigcap_{i=1}^n \varphi^*(\{ \tilde{\lambda} \in \tilde{F} : \tilde{\lambda}(\varphi'(p_i)) > a_i \}) = \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{ \lambda \in F : \lambda(p_i) > a_i \} \cap \varphi^*(\tilde{F}) \end{aligned}$$

*) Wie (1.13) zeigen wird, kann der Fall $X' = \emptyset$ wirklich eintreten.

offen in $\varphi^*(\tilde{F})$.

Da mit $\tilde{\lambda} \in \tilde{F}$ auch $\varphi^*(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} \circ \varphi'$ ein linearer Verbandshomomorphismus ist, gilt wegen $\varphi(1) = 1$ und Lemma (1.7)

$$\varphi^*(\mathcal{E}(\tilde{X})) \subset \mathcal{E}(X).$$

Nun aber sind $\mathcal{E}(\tilde{X})$ bzw. $\mathcal{E}(X)$ homöomorph zu $\tilde{X}$ bzw. X , weil wegen der $\mathcal{P}$ -Harmonizität der Raum $\tilde{E} \cap \mathcal{K}(\tilde{X})$ bzw. $E \cap \mathcal{K}(X)$ bezüglich der Supremumsnorm dicht in $\mathcal{K}(\tilde{X})$ bzw. $\mathcal{K}(X)$ liegt, und daher die Topologie von $\tilde{X}$ bzw. von X die initiale Topologie bezüglich $\tilde{E}$ bzw. E ist.

Aus diesen Überlegungen folgt die Existenz einer stetigen Injektion

$$\psi: \tilde{X} \longrightarrow X,$$

welche als Abbildung von $\tilde{X}$ auf $\psi(\tilde{X})$ eine Homöomorphie darstellt und die Eigenschaft

$$\varphi(p) = p \circ \psi$$

für alle Potentiale $p \in \mathcal{P}^C$ besitzt.

Die Abbildung ψ ist dadurch eindeutig bestimmt, da für jede weitere Abbildung ψ' mit $\varphi(p) = p \circ \psi'$ ($p \in \mathcal{P}^C$) die Gleichung $p \circ \psi = p \circ \psi'$, also wegen der Punktstrennung von $\mathcal{P}^C$ sogar $\psi' = \psi$ gilt.

2. Schritt: $\psi(\tilde{X})$ ist abgeschlossen in X .

Zu jedem $x \in X \setminus \psi(\tilde{X})$ existieren Potentiale $p, q \in \mathcal{P}^C$ derart, daß $f := p - q$ in $\mathcal{K}(X)_+$ liegt und $f(x)$ strikt positiv ist. Dann aber ist nach Lemma (1.10) $f \circ \psi \in \mathcal{K}(\tilde{X})_+$, also $U := \{f > 0\} \setminus \psi(\text{Supp}(f \circ \psi))$ eine offene Umgebung von x mit $U \cap \psi(\tilde{X}) = \emptyset$.

Auf Grund der ersten beiden Schritte können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\tilde{X}$ als eine abgeschlossene Teilmenge von X , ψ als die natürliche Injektion von $\tilde{X}$ in X und φ als die Restriktionsabbildung

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathcal{P}^C & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}^C \\ p & \longmapsto & p|_{\tilde{X}} \end{array}$$

annehmen.

3. Schritt :

- (a) Für jedes $h \in \mathcal{K}_+^*(X)$ ist $h|_{\tilde{X}} \in \mathcal{K}_+^*(\tilde{X})$.
 (b) Für jedes $f \in \mathcal{K}(X)_+$ mit $f|_{X \setminus \tilde{X}} = 0$ ist $(Rf)|_{\tilde{X}} = \tilde{R}(f|_{\tilde{X}})$.
 (c) Zu jedem $h \in \mathcal{K}_+^*(\tilde{X})$ existiert ein $h' \in \mathcal{K}_+^*(X)$ mit $h'|_{X'} = h|_{\tilde{X}}$.

Denn : Jedes $h \in \mathcal{K}_+^*(X)$ ist Supremum einer aufsteigend filtrierenden Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}^C$. Demnach ist $h|_{\tilde{X}} = \sup \mathcal{F}|_{\tilde{X}} \in \mathcal{K}_+^*(\tilde{X})$, also (a) richtig.

Zum Beweis von (b) sei $f \in \mathcal{K}(X)_+$ mit $f|_{X \setminus \tilde{X}} = 0$. Dann ist wegen (a)

$$\begin{aligned} \tilde{R}(f|_{\tilde{X}}) &= \inf \{ \tilde{u} \in \mathcal{K}_+^*(\tilde{X}) : \tilde{u} \geq f|_{\tilde{X}} \} \leq \\ &\leq \inf \{ u|_{\tilde{X}} : u \in \mathcal{K}_+^*(X) \wedge u \geq f \} = (Rf)|_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Andrerseits ist $\tilde{R}(f|_{\tilde{X}}) \in \tilde{\mathcal{P}}^C$, also Restriktion eines Potentials $p \in \mathcal{P}^C$. Wegen $f|_{X \setminus \tilde{X}} = 0$ ist $f \leq p$, also $(Rf)|_{\tilde{X}} \leq p|_{\tilde{X}} = \tilde{R}(f|_{\tilde{X}})$.

Wir zeigen nun (c). Für jedes $h \in \mathcal{K}_+^*(\tilde{X})$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} h_1 : X &\longrightarrow \begin{cases} R \cup \{\infty\} \\ h(x) \text{ falls } x \in \tilde{X} \end{cases} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 \\ \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

nach unten halbstetig, also Supremum eines aufsteigend filtrierenden Netzes $(f_a)_{a \in I}$ in $\mathcal{K}_+(X)$. Dann aber ist $(Rf_a)_{a \in I}$ aufsteigend filtrierend in $\mathcal{P}^C$, also

$$h' := \sup_{a \in I} Rf_a \in \mathcal{K}_+^*(X).$$

Wegen $f_a|_{\tilde{X}} \leq h$ und (b) ist auf $\tilde{X}$

$$f_a \leq Rf_a = \tilde{R}(f_a|_{\tilde{X}}) \leq h \quad \text{für jedes } a \in I, \text{ d.h.}$$

h' stimmt auf X' mit h überein.

4. Schritt : Sei $X' \neq \emptyset$. Wir zeigen nun, daß für jede offene, relativ-kompakte Menge U , deren Abschluß (bezüglich X) $\bar{U}$ in X' enthalten ist, die harmonischen Maße $(\mu_x^U)_{x \in U}$ bezüglich des harmonischen Raumes $(X', \mathcal{K}_{|X'})$ mit den harmonischen Maßen $(\tilde{\mu}_x^U)_{x \in U}$ bezüglich $(X', \mathcal{K}_{|X'})$ übereinstimmen.

Dann sind nämlich auf X' die Garbendaten $\mathcal{K}^*$ und $\tilde{\mathcal{K}}^*$ identisch, d.h.

$$\Psi|_{\Psi^{-1}(X')} : \Psi^{-1}(X') \longrightarrow X'$$

ist tatsächlich eine biharmonische Abbildung.

Sei also U eine offene, relativ-kompakte Menge mit $\bar{U} \subset X'$ und sei $x \in U$.

Für jedes $p \in \mathcal{P}^C$ ist nach [CC] Prop. 5.3.3. und nach dem 3. Schritt (a)

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_X^U(p) &= \tilde{R}_{(p|_{\tilde{X}})}^{\tilde{X} \setminus U}(x) = \inf \{ \tilde{u}(x) : \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{K}}_+^*(\tilde{X}) \wedge \tilde{u} = p \text{ auf } \tilde{X} \setminus U \} \leq \\ &\leq \inf \{ u(x) : u \in \mathcal{K}_+^*(X) \wedge u = p \text{ auf } X \setminus U \} = R_p^{X \setminus U}(x) = \\ &= \mu_X^U(p). \end{aligned}$$

Andrerseits existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{u}_n \in \tilde{\mathcal{K}}_+^*(\tilde{X})$ mit $\tilde{u}_n = p$ auf $\tilde{X} \setminus U$ und

$$\tilde{u}_n(x) \leq \tilde{R}_{(p|_{\tilde{X}})}^{\tilde{X} \setminus U}(x) + \frac{1}{n},$$

sowie wegen 3. Schritt (c) ein $u_n' \in \mathcal{K}_+^*(X)$ mit

$$u_n'|_{X'} = \tilde{u}_n|_{X'}.$$

Wir erhalten somit wegen $u_n'|_{\partial U} = \tilde{u}_n|_{\partial U} = p|_{\partial U}$ weiter

$$\begin{aligned} \mu_X^U(p) &= \mu_X^U(u_n') \leq u_n'(x) = \tilde{u}_n(x) \leq \tilde{R}_{(p|_{\tilde{X}})}^{\tilde{X} \setminus U}(x) + \frac{1}{n} = \\ &= \tilde{\mu}_X^U(p) + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad \mu_X^U(p) \leq \tilde{\mu}_X^U(p).$$

Weil aber $(\mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C)|_{\partial U}$ dicht in $\mathcal{C}(\partial U)$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist, ergibt sich

$$\mu_X^U = \tilde{\mu}_X^U,$$

und damit die Behauptung.

Daß der Fall $X' = \emptyset$ vorkommen kann, zeigt das folgende

(1.13) Beispiel. Für jede offene Menge $U \subset X :=]0, 1[\times \mathbb{R}$ sei $\mathcal{H}^*(U)$ die Menge aller nach unten halbstetigen Funktionen $u : U \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, deren Restriktion auf $U \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ hyperharmonisch bezüglich der klassischen harmonischen Struktur der Lösungen der Laplace-Gleichung, und deren Restriktion auf jede Zusammenhangskomponente von $U \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ konkav ist. Der Raum $\mathcal{H}(U) := \mathcal{H}^*(U) \cap (-\mathcal{H}^*(U))$ aller harmonischen Funktionen besteht dann gerade aus allen stetigen Funktionen auf U , welche auf $U \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ zweimal stetig differenzierbar sind und dort die Laplace-Gleichung lösen, und welche auf $U \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ lokal affin-linear sind.

Wie sich aus dem Satz (2.5) unmittelbar ergeben wird, ist $(X, \mathcal{H}^*)$ ein harmonischer Raum.

Die Menge $\mathfrak{J}_\mathbb{R}$ aller achsenparallelen, in X offenen, relativ-kompakten Rechtecke bildet eine starke Basis regulärer Mengen.

In der Tat : Setzt man zur Abkürzung $H_1 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $H_2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$, $T := \mathbb{R} \times \{0\}$, so existieren zu jedem $U \in \mathfrak{J}_\mathbb{R}$ mit $U \cap T \neq \emptyset$ und zu jeder stetigen Randfunktion $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ für $i = 1, 2$ Funktionen $f_i \in \mathcal{C}(\partial(U \cap H_i))$ derart, daß f_i auf $\partial U \cap H_i$ mit f übereinstimmt und auf $\bar{U} \cap T$ die Funktion f_1 gleich f_2 und zudem affin-linear ist. Sind dann h_i die Lösungen des (üblichen) Dirichlet-problems von $(U \cap H_i, f_i)$, so ist die zu (U, f) gehörige harmonische Lösung H_f^U gegeben durch

$$H_f^U := \begin{cases} h_1 & \text{auf } U \cap H_1 \\ f_1 & \text{auf } U \cap T \\ h_2 & \text{auf } U \cap H_2. \end{cases}$$

Das Intervall $\tilde{X} :=]0, 1[$, versehen mit der harmonischen Struktur $\tilde{\mathcal{H}}^*$ der Lösungen der Laplace-Gleichung auf dem $\mathbb{R}^1$, ist durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \tilde{X} &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

so in X eingebettet, daß die Restriktionsabbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}^c &\longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}^c \\ p &\longmapsto p(., 0) \end{aligned}$$

einen Kegelepimorphismus von $\mathcal{P}^c$ auf $\tilde{\mathcal{P}}^c$ darstellt.
In der Tat : Da $\tilde{X} \times \{0\}$ eine Absorptionsmenge von X ist, wird durch φ der Kegel $\mathcal{P}^c$ wirklich in $\tilde{\mathcal{P}}^c$ abgebildet. Zum Beweis der Surjektivität von φ sei $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}^c$.
Die Fortsetzung

$$\begin{aligned} p &: X \longrightarrow R \\ (x, y) &\longmapsto \tilde{p}(x) \end{aligned}$$

auf X ist sicher superharmonisch, da für jedes $U \in \mathcal{X}_r$ die Ungleichung $\mu^U(p) \leq p$ auf U gilt.
Zudem ist p ein Potential bezüglich der klassischen harmonischen Struktur $\Delta \mathcal{H}^*$ der Lösungen der Laplace-Gleichung auf X : Die größte harmonische Minorante h von p auf X ist konstant auf den Geraden $\{\beta\} \times R$, $0 < \beta < 1$ (Man beachte, daß mit h auch die Funktion $h_t : (x, y) \longmapsto h(x, y+t)$ für $t \in R$ eine harmonische Minorante von p ist !). Wegen $\Delta h = 0$ ist h dann von der Form

$$(x, y) \longmapsto a \cdot x + b \quad (a, b \in R);$$

wegen $0 \leq h \leq p$ bleibt nur noch die Möglichkeit $h = 0$.

Für das klassische Potential p gilt demnach

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\Delta}_R^{W_n} p,$$

wobei W_n die kompakte Menge $\{\tilde{p} \geq \frac{1}{n}\} \times [-n, n]$ und $\hat{\Delta}_R^{W_n} p$ die Gefegte von p auf W_n bezüglich $(X, \Delta \mathcal{H}^*)$ bezeichnet.

Nun aber gilt nach Definition von $\mathcal{H}^*$

$$\hat{\Delta}_R^{W_n} p \leq \hat{\Delta}_R^{W_n} p,$$

so daß

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\Delta}_R^{W_n} p,$$

also $p \in \mathcal{P}(X)$ folgt.

Schließlich ergibt sich aus diesen Überlegungen weiter, daß auch auf X ein strikt positives, stetiges Potential existiert (nämlich zum Beispiel $p : (x, y) \mapsto x \cdot (1-x)$).

Wir haben hier also tatsächlich die Situation von Satz (1.12) vorliegen. In diesem Fall aber ist das Innere der eingebetteten Menge $\Psi(\tilde{X})$ leer; d.h. Satz (1.12) macht keine weiteren Angaben über die Beziehung der beiden harmonischen Strukturen zueinander.

Besonders übersichtlich wird die Situation dann, wenn der Kegel-epimorphismus φ bijektiv ist. Wir erhalten als Korollar zu Satz (1.12) mit den Bezeichnungen von (1.11) :

(1.14) Korollar. Zu jedem Kegelisomorphismus

$$\varphi : \mathcal{P}^C \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}^C$$

zwischen den Kegeln der stetigen, reellwertigen Potentiale zweier δ -kompakter, $\mathcal{P}$ -harmonischer Räume $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ existiert eine strikt positive Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\tilde{X})$ und eine biharmonische Abbildung

$$\psi : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}}^*) \longrightarrow (X, \mathcal{H}^*).$$

Für jedes Potential $p \in \mathcal{P}^C$ ist dabei
 $\varphi(p) = \tilde{f} \cdot (p \circ \psi).$

Beweis. Sei $p_0 \in \mathcal{P}^C$ strikt positiv. Nach Lemma (1.8) ist dann auch das Potential $\varphi(p_0)$ strikt positiv.

Anwendung von Satz (1.12) auf die Räume $(X, \mathcal{H}_{p_0}^*)$, $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}_{\varphi(p_0)}^*)$ und den Kegelisomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathcal{P}_{p_0}^C &\longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}_{\varphi(p_0)}^C \\ p &\longmapsto \frac{\varphi(p \cdot p_0)}{\varphi(p_0)} \end{aligned}$$

bzw. auf $(\varphi')^{-1}$ liefert eine Homöomorphie

$$\psi : \tilde{X} \longrightarrow X,$$

welche eine biharmonische Abbildung zwischen den Räumen $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}_{\varphi(p_0)}^*)$ und $(X, \mathcal{H}_{p_0}^*)$, also auch zwischen den harmonischen Räumen $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}}^*)$ und $(X, \mathcal{H}^*)$ mit
 $\tilde{f} = \frac{\varphi(p_0)}{p_0 \circ \psi} \in \mathcal{C}(\tilde{X})$ vermittelt.

Wir verdeutlichen uns die Aussage des Satzes noch einmal an dem folgenden Beispiel.

(1.15) Beispiel (Kelvin-Transformation).

Sei $X := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, versehen mit der harmonischen Struktur der Lösungen der Laplace-Gleichung.

Die Kelvintransformation

$$\begin{aligned}\psi : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|^2}\end{aligned}$$

ist eine Homöomorphie mit $\psi \circ \psi = \text{id}$. Wie eine kurze Rechnung zeigt, transformiert sich die Green-Funktion

$$G : (x, y) \mapsto \frac{1}{\|x - y\|}$$

unter ψ wie folgt : Für alle x, y in X gilt

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot G(\psi(x), y) = \frac{1}{\|y\|} \cdot G(x, \psi(y)).$$

Sei nun P die Menge aller hyperharmonischen Funktionen

$$U^\mu := \int^* G(\cdot, y) \mu(dy)$$

mit einem positiven Radonmaß μ auf X und sei

$$\varphi : P \longrightarrow P$$

definiert durch

$$\varphi(U^\mu)(x) := \int^* G(x, y) \psi\left(\frac{1}{\|\cdot\|} \cdot \mu\right)(dy)$$

($x \in X$, μ positives Radonmaß auf X).

Dabei bezeichnet $\frac{1}{\|\cdot\|}$ die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{\|x\|}$;

$\psi\left(\frac{1}{\|\cdot\|} \cdot \mu\right)$ ist das ψ -Bildmaß des mit der Dichtefunktion $\frac{1}{\|\cdot\|}$ versehenen Maßes μ . Wegen

$$\varphi(U^\mu)(x) = \int^* G(x, \psi(y)) \cdot \frac{1}{\|y\|} \mu(dy) = \frac{1}{\|x\|} \cdot \int^* G(\psi(x), y) \mu(dy)$$

ist $\varphi \circ \varphi = \text{id}$ und $\varphi(\mathcal{P}^c) = \mathcal{P}^c$; d.h. φ ist ein Kegelisomorphismus von $\mathcal{P}^c$ auf sich.

Die in (1.14) auftretende Proportionalitätsfunktion $\tilde{f}$ bestimmt sich hier zu

$$\tilde{f} = \frac{\varphi(p_0)}{p_0 \circ \psi} = \frac{1}{\|\cdot\|}$$

($p_0 \in \mathcal{P}^c$ strikt positiv). Nach (1.14) verhält sich dann das Garbendatum $\mathcal{H}$ unter ψ wie folgt : Für eine offene Menge $U \subset X$ ist

$$\mathcal{H}(\psi(U)) \circ \psi|_U = \left\{ \frac{h}{\frac{1}{\|\cdot\|}} : h \in \mathcal{H}(U) \right\},$$

d.h. eine Funktion h ist genau dann harmonisch auf U , wenn die Funktion $\frac{1}{\|\cdot\|} \cdot (h \circ \Psi)$ harmonisch auf der an der Einheitssphäre gespiegelten Menge $\Psi(U)$ ist.

Daß es nicht möglich ist, ähnliche Ergebnisse wie in Satz (1.12) zu erhalten, wenn man auf die Surjektivität von φ verzichtet und sie durch Injektivität ersetzt, zeigt das folgende

(1.16) Beispiel. Sei $(X, \mathcal{H}^*)$ der harmonische Raum der Lösungen der Laplace-Gleichung auf $X :=]-\infty, 1[$.

Ferner sei für jede offene, zusammenhängende Menge $U \subset X$ $\mathcal{H}^*(U)$ die Menge aller nach unten halbstetigen Funktionen $u : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, deren Restriktion auf $U \cap]0, 1[$ und auf $U \cap]-\infty, 0[$ konkav und - falls $0 \in U$ - deren Restriktion auf $U \cap]0, 1[$ antiton ist.

Durch $\mathcal{H}^*$ wird auf X eine zweite harmonische Struktur definiert. Der zu dem $\mathcal{P}$ -harmonischen Raum $(X, \mathcal{H}^*)$ gehörige Kegel $\tilde{\mathcal{P}}^C$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale enthält den Kegel $\mathcal{P}^C$. Für die harmonischen Funktionen aber gelten weder die Inklusion $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{H}^*(X)$ noch die Inklusion $\mathcal{H}^*(X) \subset \mathcal{H}(X)$: Die Funktion $x \mapsto \inf(x, 0)$ gehört nämlich zu $\mathcal{H}^*(X) \setminus \mathcal{H}(X)$, die Funktion $x \mapsto x$ dagegen zu $\mathcal{H}(X) \setminus \mathcal{H}^*(X)$.

Bleibt noch die Frage: Lassen sich ähnliche Sätze beweisen, wenn die Kegel $\mathcal{P}^C$ und $\tilde{\mathcal{P}}^C$ durch andere (Unterkegel der Potential-) Kegel ersetzt werden? In § 4. werden wir sehen, daß an die Stelle der Kegel $\mathcal{P}^C$, $\tilde{\mathcal{P}}^C$ die Kegel aller reellwertigen (feinen) Potentiale treten können. Andererseits zeigt das folgende Beispiel von C. Constantinescu, daß es zwischen zwei $\mathcal{P}$ -harmonischen Räumen keine biharmonische Abbildung geben muß, wenn die Kegel aller Potentiale oder die Kegel der global definierten superharmonischen Funktionen isomorph sind.

(1.17) Beispiel. Seien $X = [0, 1[$, $\tilde{X} =]0, 1[$.

Für jedes in X offene Intervall V setzen wir $m_V := \sup \{m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} \in V\} \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls $V \cap \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nicht leer ist, andernfalls $m_V := 1$.

Eine stetige Funktion h auf V gehöre genau dann zu $\mathcal{H}(V)$ ($= \tilde{\mathcal{H}}(V)$, falls $0 \notin V$), wenn h auf $V \cap [\frac{1}{m_V}, 1[$ konstant und auf $V \cap [0, \frac{1}{m_V}]$ affin-linear ist ($\frac{1}{\infty} := 0$).

Bezüglich der dadurch definierten Garbendaten $\mathcal{H}$ auf X und $\tilde{\mathcal{H}}$ auf $\tilde{X}$ sind alle Intervalle $]a, b[$ mit $0 < a < b < 1$, sowie (für $\mathcal{H}$) die Intervalle $[0, a[$, $0 < a < 1$, regulär.

Eine nach unten halbstetige, nach unten endliche Funktion auf einer offenen, zusammenhängenden Menge $V \subset X$ bzw. $\subset \tilde{X}$ ist genau dann hyperharmonisch, wenn sie auf allen Intervallen $V \cap]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}$, konkav und auf $V \cap [\frac{1}{m_V}, 1[$ monoton fallend ist.

Die Potentialkegel bestehen daher aus allen positiven superharmonischen Funktionen u mit $\lim_{t \rightarrow 1} u(t) = 0$; die Restriktionsabbildungen

$$\varphi: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{X})$$

bzw.

$$\varphi: \mathcal{J}(X) \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}(\tilde{X})$$

vermitteln daher eine Isomorphie der Kegel $\mathcal{P}(X)$ und $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{X})$ bzw. $\mathcal{J}(X)$ und $\tilde{\mathcal{J}}(\tilde{X})$, obwohl die Grundräume X und $\tilde{X}$ nicht homöomorph sind.

Hier wird durch

$$p \longmapsto p|_{]0, 1[}$$

kein Kegelepimorphismus von $\mathcal{P}^c$ auf $\tilde{\mathcal{P}}^c$ definiert: Zum Beispiel besitzt die Funktion $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}^c$ mit

$$\tilde{p}(x) := 2 \cdot n - n \cdot (n+1) \cdot x \quad \text{für} \quad \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

kein φ -Urbild in $\mathcal{P}^c$.

§ 2. Struktur der Einbettung

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns zunächst mit der Frage, wie sich in der Situation von Satz (1.12) der eingebettete Raum $\Psi(\tilde{X})$ in den harmonischen Raum $(X, \mathcal{H}^*)$ einfügt. Wie die Beispiele (1.3) und (1.13) schon vermuten lassen, gilt der folgende

(2.1) Satz. Seien $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ zwei $\mathfrak{P}$ -harmonische Räume mit abzählbarer Basis und sei Ψ eine Injektion von $\tilde{X}$ in X derart, daß durch die Zuordnung

$$\varphi : p \longmapsto p \circ \Psi$$

ein Kegelepimorphismus von $\mathfrak{P}^C$ auf $\tilde{\mathfrak{P}}^C$ definiert wird.

Dann ist jeder Punkt $x \in \partial(\Psi(\tilde{X}))$ ein regulärer Randpunkt der offenen Menge $X \setminus \Psi(\tilde{X})$.

Beweis. Da die beiden harmonischen Räume und der Kegelepimorphismus φ die Voraussetzungen von (1.12) erfüllen, ist $\Psi(\tilde{X})$ abgeschlossen in X .

Nach dem 3. Schritt (a) des Beweises von Satz (1.12) gilt $\mathcal{H}_+^*(X) \circ \Psi \subset \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$; mit anderen Worten: Ψ ist stetig bezüglich der feinen Topologien auf $\tilde{X}$ und X .

Weil es in der feinen Topologie keine isolierten Punkte gibt, ist für Randpunkte x von $\Psi(\tilde{X})$ die einpunktige Menge $\Psi^{-1}(\{x\})$ nicht fein offen, also $(X \setminus \Psi(\tilde{X})) \cup \{x\}$ keine feine Umgebung von x . Dies bedeutet, daß x im feinen Abschluß von $((X \setminus \Psi(\tilde{X})) \cup \{x\}) = \Psi(\tilde{X}) \setminus \{x\}$ liegen muß, $\Psi(\tilde{X})$ also in x nicht dünn sein kann.

(2.2) Korollar. $\mathcal{H}_+^*(X) \circ \Psi = \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$.

Beweis. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß sich jede Funktion $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$ faktorisieren läßt als $\tilde{h} = h \circ \Psi$ mit $h \in \mathcal{H}_+^*(X)$. In der Tat ist $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$ Supremum einer aufsteigend filtrierenden Familie $(\tilde{p}_a)_{a \in I}$ von Potentialen in $\tilde{\mathfrak{P}}^C$. Jedes dieser Potentiale $\tilde{p}_a$ läßt sich darstellen als

$$\tilde{p}_a = \hat{R}_f^{\Psi(\tilde{X})} \circ \varphi$$

mit $f_a \in \varphi^{-1}(\tilde{p}_a) \subset \mathcal{P}^0$; denn wegen Satz (2.1) gilt $\hat{R}_{f_a}^{\psi}(\tilde{X}) = R_{f_a}^{\psi}(\tilde{X}) = f_a$ auf $\psi(\tilde{X})$, also $\hat{R}_{f_a}^{\psi}(\tilde{X}) \circ \psi = \tilde{p}_a$.

Dann aber erhalten wir mit $h := \sup_{a \in I} \hat{R}_{f_a}^{\psi}(\tilde{X}) \in \mathcal{H}_+^*(X)$
die gewünschte Faktorisierung $\tilde{h} = h \circ \psi$.

(2.3) Korollar. Jede superharmonische Funktion $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{U})$ auf einer offenen Teilmenge $\tilde{U}$ von $\tilde{X}$ besitzt " lokal eine hyperharmonische Fortsetzung auf X "; d.h., zu jeder offenen, relativ-kompakten Menge $\tilde{V}$, deren Abschluß $\tilde{\bar{V}}$ in $\tilde{U}$ enthalten ist, existiert eine hyperharmonische Funktion s auf $V := \psi(\tilde{V}) \cup (X \setminus \psi(\tilde{X}))$ mit $s \circ \psi = \tilde{s}$ auf $\tilde{V}$.

Ist $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{U})$ stetig und reellwertig, so kann auch s stetig, reellwertig und somit superharmonisch gewählt werden.

Wir werden später sehen (Beispiel (2.6)), daß es (mit den obigen Bezeichnungen) zu einer beliebigen superharmonischen Funktion $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{U})$ im allgemeinen keine superharmonische Funktion s auf V gibt mit $s \circ \psi|_{\tilde{V}} = \tilde{s}|_{\tilde{V}}$. Insbesondere ist auch die wegen (2.2) naheliegende Vermutung, daß die Kegel $\tilde{\mathcal{F}}_+(\tilde{X})$ und $\mathcal{H}_+(X) \circ \psi$ übereinstimmen, falsch.

Beweis von (2.3). Nach dem Fortsetzungssatz von Hervé gibt es Potentiale $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}^0$ und $\tilde{q} \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{X})$ mit $\tilde{q} = \tilde{s} + \tilde{p}$ auf $\tilde{V}$.

Dabei kann - wie zum Beispiel der Beweis von [CC] Theorem 2.3.2. zeigt - das Potential $\tilde{p}$ so gewählt werden, daß $\tilde{p} = \tilde{R}(\tilde{g}, \tilde{p})$ ist mit einer Funktion $\tilde{g} \in \mathcal{K}(\tilde{X})$, $0 \leq \tilde{g} \leq 1$, deren Träger zu $\tilde{V}$ fremd ist.

Nach Voraussetzung und Korollar (2.2) gibt es ein Potential $p \in \mathcal{P}^0$ und eine Funktion $q \in \mathcal{H}_+^*(X)$ mit $p \circ \psi = \tilde{p}$, $q \circ \psi = \tilde{q}$, sowie eine stetige Funktion $g \in \mathcal{K}_+(X)$ mit $g = 0$ auf $X \setminus \psi(\tilde{X})$ und $g \circ \psi = \tilde{g}$. Durch

$$s := q|_V - R(g, p)|_V$$

wird daher eine hyperharmonische Funktion s auf V

definiert, die - wie der 3. Schritt (b) des Beweises von Satz (1.12) zeigt - auf $\tilde{V}$ die Bedingung $s \circ \psi = q \circ \psi - R(g.p) \circ \psi = \tilde{q} - \tilde{R}((g \circ \psi).(p \circ \psi)) = \tilde{s}$ erfüllt.

Falls $\tilde{s}$ stetig und endlich ist, kann auch $\tilde{q}$ stetig und endlich und damit $q \in \mathcal{P}^c$ gewählt werden, was $s \in \mathcal{J}(V) \cap \mathcal{C}(V)$ nach sich zieht.

Das eben bewiesene Korollar besagt, daß mit den obigen Bezeichnungen $\mathcal{J}(\tilde{U})|_{\tilde{V}} \subset \mathcal{K}^*(V) \circ \psi|_{\tilde{V}}$ ist. Gleichheit gilt hier im allgemeinen sicher nicht, denn in Beispiel (1.3) ist

$$h :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1+x$$

in $\mathcal{K}(-1, 1[)$, jedoch $h|_{[0, 1[}$ nicht in $\mathcal{J}([0, 1[)$ enthalten.

Dieses Beispiel zeigt weiter, daß die Abbildung ψ des Satzes (1.12) nicht notwendig eine harmonische Abbildung sein muß.

Genauer kennzeichnet der folgende Satz die Harmonizität von ψ .

(2.4) Satz. In der Situation von Satz (2.1) ist ψ genau dann eine harmonische Abbildung, wenn $\psi(\tilde{X})$ eine Absorptionsmenge von X ist.

Beweis. Wir können wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\tilde{X} \subset X$ und ψ die natürliche Einbettungsabbildung ist.

Sei zunächst $\psi : \tilde{X} \longrightarrow X$ harmonisch.

In dem $\mathcal{P}$ -harmonischen Raum $(X, \mathcal{K}^*)$ gibt es ein strikt positives Potential $p \in \mathcal{P}^c$. Für jede kompakte Menge $K \subset X \setminus \tilde{X}$ ist die Restriktion h_K von $\hat{R}_p^K$ auf $X \setminus K$ harmonisch, also gehört nach Voraussetzung und (1.5.3) $h_K|_{\tilde{X}}$ zu $\mathcal{K}_+(\tilde{X})$. Da h_K auf $\tilde{X}$ von dem Potential $p|_{\tilde{X}} \in \mathcal{P}^c$ majorisiert wird, ist $\hat{R}_p^K = h_K = 0$ auf $\tilde{X}$. Folglich stellt $\tilde{X}$ das Nullstellengebilde einer positiven, hyperharmonischen Funktion, nämlich der Funktion

$$q := \hat{R}_p^{\tilde{X}} = \sup \{ \hat{R}_p^K : K \subset X \setminus \tilde{X} \text{ kompakt} \}$$

dar, ist also eine Absorptionsmenge von X .

Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß $\tilde{X}$ Absorptionsmenge von X ist.

Nach [CC] Ex. 6.1.8. induziert $(X, \mathcal{H}^*)$ durch Restriktion des Garbendatums $\mathcal{H}^*$ auf $\tilde{X}$ eine harmonische Struktur $\tilde{\mathcal{H}}^*$ mit $\tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X}) = \mathcal{H}_+^*(X)|_{\tilde{X}}$, welche die Einbettungsabbildung $\psi : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*) \longrightarrow (X, \mathcal{H}^*)$ harmonisch macht.

Wegen Korollar (2.2) ist daher $\tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X}) = \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$, so daß ähnliche Überlegungen wie im 4. Schritt des Beweises zu Satz (1.12) auf die Gleichheit der harmonischen Strukturen $\tilde{\mathcal{H}}^*$ und $\tilde{\mathcal{H}}^*$ führen.

Damit ist die Harmonizität der Abbildung

$$\psi : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*) \longrightarrow (X, \mathcal{H}^*)$$

nachgewiesen.

Zur Veranschaulichung des folgenden Satzes greifen wir zunächst wieder auf die harmonischen Räume $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ aus Beispiel (1.3) zurück. Schon früher haben wir festgestellt, daß die natürliche Einbettungsabbildung

$$i : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*) \longrightarrow (X, \mathcal{H}^*)$$

nicht harmonisch ist. Um zu erreichen, daß i harmonisch wird, ändern wir die harmonische Struktur auf dem Zielraum X wie folgt ab :

Für jede offene Menge $U \subset X$ sei jetzt $\bar{\mathcal{H}}(U)$ die Menge aller derjenigen stetigen, reellwertigen Funktionen auf U , welche auf $U \setminus \{0\}$ lokal affin-linear und auf der Zusammenhangskomponente der 0 von $U \cap [0, 1[$ sogar konstant sind.

Der Grundraum X , versehen mit dem zugehörigen Garbendatum $\bar{\mathcal{H}}^*$ der hyperharmonischen Funktionen, ist der aus (1.16) bekannte Raum, in dem $\tilde{X}$ Absorptionsmenge ist. Jetzt ist die Einbettungsabbildung

$$i : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*) \longrightarrow (X, \bar{\mathcal{H}}^*)$$

eine harmonische Abbildung.

Das eben verwendete Konstruktionsprinzip läßt sich auf allgemeinere Situationen übertragen :

Seien $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ zwei $\mathbb{P}$ -harmonische Räume derart, daß der Grundraum $\tilde{X}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X und jeder Randpunkt von $\tilde{X}$ regulärer Randpunkt von $X \setminus \tilde{X}$ ist. Insbesondere sind diese Voraussetzungen nach (1.12) und (2.1) dann erfüllt, wenn X ein $\mathbb{P}$ -harmonischer Raum mit abzählbarer Basis und die Restriktionsabbildung auf $\tilde{X}$ ein Kegelepipomorphismus von $\mathbb{P}^c$ auf $\tilde{\mathbb{P}}^c$ ist.

Für jede offene Menge $U \subset X$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathcal{H}}^*(U)$ die Menge aller nach unten halbstetigen Funktionen $u : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, deren Restriktion auf $U \cap \tilde{X}$ zu $\tilde{\mathcal{H}}^*(U \cap \tilde{X})$ und deren Restriktion auf $U \setminus \tilde{X}$ zu $\mathcal{H}^*(U \setminus \tilde{X})$ gehört.

Dann gilt :

(2.5) Satz *). $(X, \overline{\mathcal{H}}^*)$ ist ein harmonischer Raum. $\tilde{X}$ ist Absorptionsmenge von $(X, \mathcal{H}^*)$ und die natürlichen Einbettungsabbildungen

$$\begin{aligned} i : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*) &\longrightarrow (X, \overline{\mathcal{H}}^*) \\ i' : (X \setminus \tilde{X}, \mathcal{H}^*|_{X \setminus \tilde{X}}) &\longrightarrow (X, \overline{\mathcal{H}}^*) \end{aligned}$$

sind harmonische Abbildungen.

$\overline{\mathcal{H}}^*$ stimmt genau dann mit $\mathcal{H}^*$ überein, wenn die Einbettungsabbildung i des Raumes $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ in den Ausgangsraum $(X, \mathcal{H}^*)$ schon harmonisch war.

Beweis. Für jede offene Menge $U \subset X$ sei

$$\overline{\mathcal{H}}(U) := \overline{\mathcal{H}}^*(U) \cap (-\overline{\mathcal{H}}^*(U)) = \left\{ h \in \mathcal{U}(U) : h|_{U \cap \tilde{X}} \in \tilde{\mathcal{H}}(U \cap \tilde{X}) \wedge h|_{U \setminus \tilde{X}} \in \mathcal{H}(U \setminus \tilde{X}) \right\}$$

die Menge aller harmonischen Funktionen auf U .

1. Das Garbendatum $\overline{\mathcal{H}}$ der harmonischen Funktionen ist in keinem Punkt $x \in X$ ausgeartet.

Es genügt, diese Eigenschaft für Randpunkte von $\tilde{X}$ nachzuweisen, da $\overline{\mathcal{H}}$ auf $X \setminus \tilde{X}$ mit $\mathcal{H}$ und auf dem Innern von $\tilde{X}$ mit $\tilde{\mathcal{H}}$ übereinstimmt.

Sei also $x \in \partial \tilde{X}$. Weil $\tilde{\mathcal{H}}$ in x nicht ausgeartet ist, existieren zunächst eine in X offene, relativ-kompakte Umgebung U von x und eine in einer Umgebung $\tilde{V}$ (bezüglich $\tilde{X}$) von $\bar{U} \cap \tilde{X}$ definierte, strikt positive harmonische Funktion $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{V})$.

*) nach einem Hinweis von K. Janßen.

Weiter besitzt die stetige Funktion $\tilde{h}$ eine stetige Fortsetzung f auf den Rand der offenen Menge $U \setminus \tilde{X}$, deren verallgemeinerte Dirichlet-Lösung $H_f^{U \setminus \tilde{X}}$ wegen der Regularität der Randpunkte von $X \setminus \tilde{X}$ stetig an $\tilde{h}$ "anschließt". Dies bedeutet, daß durch

$$h := \begin{cases} \tilde{h} & \text{auf } U \cap \tilde{X} \\ H_f^{U \setminus \tilde{X}} & \text{auf } U \setminus \tilde{X} \end{cases}$$

eine Funktion $h \in \bar{\mathcal{K}}(U)$ definiert wird, welche im Punkt x strikt positiv ist.

2. $\bar{\mathcal{K}}$ besitzt die Bauer-Konvergenzeigenschaft.

Sei dazu U eine offene Teilmenge von X und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge in $\bar{\mathcal{K}}(U)$ mit lokal-beschränktem Supremum h .

Da das Konvergenzaxiom für die Räume $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{K}}^*)$ und $(X, \mathcal{K}^*)$ als gültig vorausgesetzt ist, gehört $h|_{U \cap \tilde{X}}$ zu $\tilde{\mathcal{K}}(U \cap \tilde{X})$ und $h|_{U \setminus \tilde{X}}$ zu $\mathcal{K}(U \setminus \tilde{X})$, so daß nur noch die Stetigkeit von h in jedem Punkt von $U \cap \partial \tilde{X}$ zu zeigen bleibt.

Zu jedem Punkt $x \in U \cap \partial \tilde{X}$ existiert eine offene, relativ-kompakte Umgebung V mit $\bar{V} \subset U$, so daß h auf V beschränkt ist. Da die Funktion h auf $V \setminus \tilde{X}$ nach dem Satz von Lebesgue mit $H_h^{V \setminus \tilde{X}} = \mu^{V \setminus \tilde{X}}(h)$ übereinstimmt, x ein regulärer Randpunkt von $V \setminus \tilde{X}$ und h auf $\bar{V} \cap \tilde{X}$ stetig ist, ergibt sich wie oben die Stetigkeit von h im Punkte x .

3. Die resolutiven Mengen bilden eine Basis der Topologie von X (Resolutivitätsaxiom).

Sei $\mathcal{M}$ das System aller offenen, relativ-kompakten Teilmengen V von X , für die $V \cap \tilde{X}$ resolutiv bezüglich $\tilde{\mathcal{K}}^*$, sowie $V \setminus \tilde{X}$ resolutiv bezüglich $\mathcal{K}^*$ ist, und auf denen eine Funktion $h \in \mathcal{K}(V)$ existiert mit $\inf h(V) > 0$.

$\mathcal{M}$ bildet eine Basis der Topologie von X (vgl. [CC] Cor. 2.4.2.). Wendet man nacheinander für eine Menge $V \in \mathcal{M}$ die MP-Eigenschaft von $V \cap \tilde{X}$ (bezüglich $\tilde{\mathcal{K}}^*$) und die MP-Eigenschaft von $V \setminus \tilde{X}$ (bezüglich $\mathcal{K}^*$) an, so ist klar, daß V eine MP-Menge bezüglich $\bar{\mathcal{K}}^*$ ist. Wir werden nun zeigen, daß jede Menge $V \in \mathcal{M}$ resolutiv bezüglich $\bar{\mathcal{K}}^*$ ist, d.h., daß für jede stetige Randfunktion f die Unterlösung $\bar{H}_f^{\bar{\mathcal{K}}^*, V}$ mit

der Oberlösung $\tilde{u}^*_{H_f^V}$ in jedem Punkt $x \in V$ übereinstimmt.

Für eine auf $\mathcal{V}$ definierte numerische Funktion g bezeichnen wir dazu mit $\tilde{u}^*_{O_g^V}$ das System aller Oberfunktionen zu V und g , d.i. die Menge aller nach unten beschränkten Funktionen $u \in \tilde{u}^*(V)$, welche in jedem Randpunkt z von V die Bedingung

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow z \\ y \in V}} u(y) \geq g(z)$$

erfüllen, und entsprechend mit $\tilde{u}^*_{U_g^V} := -\tilde{u}^*_{O_{-g}^V}$ das System der Unterfunktionen. Analog werden die Mengen $\tilde{u}^*_{O_g^{V \cap \tilde{X}}}$, $\tilde{u}^*_{U_g^{V \cap \tilde{X}}}$, $\tilde{u}^*_{O_g^{V \setminus \tilde{X}}}$, $\tilde{u}^*_{U_g^{V \setminus \tilde{X}}}$ definiert.

Außerdem bemerken wir, daß wegen der Abgeschlossenheit von $\tilde{X}$ der Rand $\partial(V \cap \tilde{X})$ von $V \cap \tilde{X}$ (in $\tilde{X}$) enthalten ist im Rand ∂V von V .



Ferner ist $\partial V = \partial(V \cap \tilde{X}) \cup (\partial(V \setminus \tilde{X}) \setminus V)$; der Rand $\partial(V \setminus \tilde{X})$ setzt sich disjunkt zusammen aus $\partial V \cap V \setminus \tilde{X}$ und $V \cap \partial \tilde{X}$.

Nach diesen Vorbereitungen sei also nun $f \in \mathcal{C}(\partial V)$.

Da für jede Funktion $\tilde{u}_1 \in \tilde{u}^*_{O_f^{V \cap \tilde{X}}}$ bzw. $\tilde{u}_2 \in \tilde{u}^*_{U_f^{V \cap \tilde{X}}}$ die durch

$$u_1 := \begin{cases} \tilde{u}_1 & \text{auf } V \cap \tilde{X} \\ \infty & \text{auf } V \setminus \tilde{X} \end{cases}, \text{ bzw. } u_2 := \begin{cases} \tilde{u}_2 & \text{auf } V \cap \tilde{X} \\ -\infty & \text{auf } V \setminus \tilde{X} \end{cases}$$

definierten Funktionen u_1, u_2 zu $\tilde{u}^*_{O_f^V}$ bzw. zu $\tilde{u}^*_{U_f^V}$ gehören, stimmt $\tilde{u}^*_{H_f^V}$ mit $\tilde{u}^*_{H_f^V}$ wegen der Resolutivität von $V \cap \tilde{X}$ zumindest in jedem Punkt $x \in V \cap \tilde{X}$ überein. Insbesondere wird also für einen solchen Punkt x das harmonische Maß $\tilde{p}_x^V$ zu V bezüglich $\tilde{u}^*$ von $\partial(V \cap \tilde{X})$ getragen und stimmt dort mit dem Maß $\tilde{p}_x^{V \cap \tilde{X}}$ überein.

Sei jetzt $x \in V \setminus \tilde{X}$.

Wiederum wegen der Resolutivität von $V \cap \tilde{X}$ ist

$$\inf \{ \tilde{p}_x^{V \setminus \tilde{X}}(u \cdot 1_{V \cap \tilde{X}}) : u \in \tilde{u}^*_{O_f^{V \cap \tilde{X}}} \} = \\ = \sup \{ \tilde{p}_x^{V \setminus \tilde{X}}(u \cdot 1_{V \cap \tilde{X}}) : u \in \tilde{u}^*_{U_f^{V \cap \tilde{X}}} \}.$$

Demnach gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei beschränkte Funktionen $\tilde{u}_1 \in \tilde{u}^*_{O_f^{V \cap \tilde{X}}}$, $\tilde{u}_2 \in \tilde{u}^*_{U_f^{V \cap \tilde{X}}}$ derart, daß die durch

$$f_i := \begin{cases} \tilde{u}_i & \text{auf } V \cap \partial \tilde{X} \\ f & \text{auf } \partial V \cap V \setminus \tilde{X} \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

auf dem Rand von $V \setminus \tilde{X}$ definierten Funktionen f_1, f_2 die Bedingung

$$\mu_{\tilde{X}}^{V \setminus \tilde{X}}(f_1) \leq \mu_{\tilde{X}}^{V \setminus \tilde{X}}(f_2) + \frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllen.

Die Funktionen f_1 bzw. f_2 sind beschränkt und (nach Definition von $\bar{\kappa}_f^{*0V \setminus \tilde{X}}$) nach unten bzw. nach oben halbstetig, und damit resolutiv bezüglich $V \setminus \tilde{X}$.

Infolgedessen existieren zwei weitere Funktionen $u_1^i \in \bar{\kappa}_f^{*0V \setminus \tilde{X}}$, $u_2^i \in \bar{\kappa}_f^{*0V \setminus \tilde{X}}$ mit

$$u_1^i(x) \leq \mu_{\tilde{X}}^{V \setminus \tilde{X}}(f_1) + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \mu_{\tilde{X}}^{V \setminus \tilde{X}}(f_2) \leq u_2^i(x) + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\text{d.h.} \quad u_2^i(x) \leq u_1^i(x) \leq u_2^i(x) + \varepsilon.$$

Schließlich sind die Funktionen u_1, u_2 definiert durch

$$u_i := \begin{cases} u_1^i & \text{auf } V \setminus \tilde{X} \\ \tilde{u}_1 & \text{auf } V \cap \tilde{X} \end{cases} \quad (i = 1, 2),$$

wegen

$$\liminf_{\substack{y \xrightarrow{z} z \\ y \in V \setminus \tilde{X}}} u_1(y) \geq f_1(z) = \tilde{u}_1(z) = u_1(z) \quad \text{bzw.}$$

$$\limsup_{\substack{y \xrightarrow{z} z \\ y \in V \setminus \tilde{X}}} u_2(y) \leq u_2(z) \quad \text{in jedem Randpunkt } z \in V \cap \partial \tilde{X}$$

nach unten bzw. nach oben halbstetig. Sie gehören demnach zu $\bar{\kappa}_f^{*0V}$ bzw. zu $\bar{\kappa}_f^{*0V}$ und erfüllen $u_1(x) \leq u_2(x) + \varepsilon$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar war, gilt

$$\bar{\kappa}_f^{*0V}(x) = \bar{\kappa}_f^{*0V}(x) =: \bar{\mu}_f^V(x)$$

auch für jeden Punkt $x \in V \setminus \tilde{X}$, womit die Resolutivität einer jeden Menge $V \in \mathcal{M}$ nachgewiesen ist.

4. Eine nach unten halbstetige, auf einer offenen Menge $U \subset X$ definierte numerische Funktion $u : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gehört zu $\bar{\kappa}^*(U)$, falls für jede offene, relativ-kompakte Menge V mit $\bar{V} \subset U$ die Ungleichung $\bar{\mu}^V(u) \leq u$ auf V gilt (Vollständigkeitsaxiom).

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\bar{\kappa}^*$.

Nach 1. mit 4. ist $(X, \bar{\mathcal{H}}^*)$ ein harmonischer Raum (im Sinne von [CC]) mit $\tilde{X}$ als Absorptionsmenge. Auf Grund der Definition von $\bar{\mathcal{H}}^*$ ist sofort klar, daß die beiden Einbettungsabbildungen i und i' harmonisch sind. Es bleibt demnach noch zu zeigen, daß $\bar{\mathcal{H}}^*$ mit $\mathcal{H}^*$ übereinstimmt, wenn die natürliche Einbettungsabbildung von $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ in den Ausgangsraum $(X, \mathcal{H}^*)$ schon harmonisch war. In diesem Fall aber ist nach Definition für jede offene Menge U

$$\mathcal{H}^*(U) \subset \bar{\mathcal{H}}^*(U),$$

so daß aus [CC] Theorem 2.1.1. die Gleichheit von $\mathcal{H}^*$ und $\bar{\mathcal{H}}^*$ folgt.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun leicht das angekündigte (Gegen-) Beispiel zu Korollar (2.3) angeben.

(2.6) Beispiel. Sei $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ der in Beispiel (1.17) mit $(X, \mathcal{H}^*)$ bezeichnete harmonische Raum mit $\tilde{X} = [0, 1[$. Versieht man $X :=]-\infty, 1[$ mit der klassischen harmonischen Struktur $\mathcal{H}^*$, so erfüllen die beiden harmonischen Räume $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ die Voraussetzungen von Satz (2.5).

Der zugehörige, in (2.5) konstruierte harmonische Raum $(X, \bar{\mathcal{H}}^*)$ ist ein $\mathbb{P}$ -harmonischer Raum, dessen Kegel $\bar{\mathcal{P}}^c$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale durch die Restriktionsabbildung

$$p \longmapsto p|_{\tilde{X}}$$

surjektiv auf den entsprechenden Potentialkegel $\tilde{\mathcal{P}}^c$ abgebildet wird.

Wir haben also hier die Ausgangssituation von (2.3) vorliegen.

Die Funktion $\tilde{s}$, definiert durch

$$\tilde{s}(x) := \begin{cases} 2 \cdot n - n \cdot (n+1) \cdot x & \text{für } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases},$$

ist superharmonisch auf $\tilde{X}$; ihre Restriktion auf ein Intervall $[0, a[$ ($0 < a \leq 1$) besitzt jedoch keine $\bar{\mathcal{H}}^*$ -superharmonische Fortsetzung auf eine $[0, a[$ umfas-

sende offene Menge $V \subset X$; die einzige $\tilde{s}$ fortsetzende Funktion $s \in \tilde{\mathcal{H}}(X)$ ist konstant $= \infty$ auf $X \setminus \tilde{X}$.

Schließlich fragen wir nach zusätzlichen Eigenschaften, welche sich von den gegebenen Räumen $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ auf den neuen zusammengesetzten Raum $(X, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ übertragen.

Da $\tilde{X}$ eine im allgemeinen nicht-triviale Absorptionsmenge von $(X, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ ist, können das Brelot-Konvergenzaxiom, Elliptizität oder die Gültigkeit des Dominationsaxioms nicht zu diesen Eigenschaften gehören. Dagegen haben wir den folgenden

(2.7) Satz. Falls die Räume $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ eine Basis regulärer Mengen besitzen, so trifft dies auch für den Raum $(X, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ zu.

Beweis. Es genügt, zu jedem Punkt $z \in \partial \tilde{X}$ und jeder offenen Umgebung U von z eine $\tilde{\mathcal{H}}^*$ -reguläre Menge V anzugeben mit $z \in V \subset U$.

Nach Voraussetzung existiert zu z und U zunächst eine $\mathcal{H}^*$ -reguläre Menge V_1 mit $z \in V_1 \subset U$, sodann eine $\tilde{\mathcal{H}}^*$ -reguläre Umgebung $\tilde{V} \subset \tilde{X}$ von z mit $\tilde{V} \subset V_1$.

Die Menge $V := (V_1 \setminus \tilde{X}) \cup \tilde{V}$ ist dann eine offene Teilmenge von U , welche $\tilde{\mathcal{H}}^*$ -regulär ist.

In der Tat: Sei f eine stetige Funktion auf ∂V . Wegen der Abgeschlossenheit von $\tilde{X}$ ist der Rand $\partial \tilde{V}$ von $\tilde{V}$ bezüglich $\tilde{X}$ in ∂V enthalten. Weil $\tilde{V}$ $\tilde{\mathcal{H}}^*$ -regulär ist, gibt es eine Funktion $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{V})$ mit $\lim_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in \tilde{V}}} \tilde{h}(x) = f(z)$ für jeden Punkt $z \in \partial \tilde{V}$.

Der Rand $\partial(V_1 \setminus \tilde{X})$ von $V_1 \setminus \tilde{X}$ ist disjunkte Vereinigung von $\partial V \cap (V_1 \setminus \tilde{X})$ und $V \cap \partial \tilde{X} = \tilde{V} \cap \partial \tilde{X}$. Durch

$$f_1 := \begin{cases} \tilde{h} & \text{auf } \tilde{V} \cap \partial \tilde{X} \\ f & \text{auf } \partial V \cap (V_1 \setminus \tilde{X}) \end{cases}$$

wird daher eine stetige Funktion auf $\partial(V_1 \setminus \tilde{X})$ definiert.

Da mit V_1 auch $V_1 \setminus \tilde{X}$ regulär ist, gehört die Funktion

$$h : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} \tilde{h}(x) & \text{falls } x \in \tilde{V} \\ \mu_x(V_1 \setminus \tilde{X}) (f_1) & \text{falls } x \in V_1 \setminus \tilde{X} \end{cases}$$

zu $\tilde{\mathcal{H}}(V)$ und erfüllt in jedem Punkt $z \in \partial V$ die Bedingung

$$\lim_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in V}} h(x) = f(z).$$

Die Funktion h ist dadurch wegen der Regularität von $\tilde{V}$ und $V_1 \setminus \tilde{X}$ eindeutig bestimmt und positiv, falls $f \geq 0$.

§ 3. Differenzierbarkeit einer harmonischen Abbildung

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen ($n, m \in \mathbb{N}$) und $(X, \mathcal{H}^*)$, $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ harmonische Räume mit einer Basis regulärer Mengen.

Zum Nachweis der angekündigten Differenzierbareitseigenschaften einer offenen harmonischen Abbildung

$$\psi : \tilde{X} \longrightarrow X$$

benötigen wir das folgende

(3.1) Lemma. Enthält das Garbendatum $\mathcal{H}$ der harmonischen Funktionen auf X "genügend.viele" $\mathcal{C}^2$ -Funktionen im Sinne von [Bo] p.80, so existiert eine dichte offene Teilmenge X_0 von X derart, daß zu jedem $x_0 \in X_0$ eine offene Umgebung U von x_0 und Funktionen $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}(U)$ existieren mit

$$\det \left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) \neq 0.$$

Beweis. Nach [Bo] Théorèmes 1.2 und 2.2 existieren eine dichte offene Teilmenge X'_0 von X und ein nicht vollständig ausgearteter elliptischer Differentialoperator ([Bo] p.75)

$$L : u \longmapsto \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + a \cdot u$$

auf X'_0 mit stetigen Koeffizientenfunktionen a_{ij} , a_i , a ($1 \leq i, j \leq n$), so daß für jede offene Teilmenge U von X'_0

$$\mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}^2(U) = \{h \in \mathcal{C}^2(U) : L(h) = 0\}$$

ist.

Für jedes $x \in X'_0$, jede offene Umgebung U von x und je n Funktionen $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}^1(U)$ bezeichne $p(x; U; h_1, \dots, h_n)$ den Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

und $N(x)$ das Maximum aller Werte $p(x; U; h_1, \dots, h_n)$, wenn U alle offenen Umgebungen von x durchläuft und $h_1, \dots, h_n$ Funktionen in $\mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}^1(U)$ sind.

Die so definierte Abbildung

$$N : X'_0 \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ist nach unten halbstetig, da für jede Zahl β die Menge $\{N > \beta\}$ offen ist.

Um zu beweisen, daß die offene Menge

$$X_0 := \{N = n\} = \{N > n-1\}$$

dicht in X'_0 (und damit in X) ist, zeigen wir, daß das Innere der in X'_0 abgeschlossenen Menge

$$X_1 := \{N \leq n-1\}$$

leer ist.

Andernfalls gäbe es eine offene, nicht-leere Teilmenge U_1 von X_1 . Die Funktion N nimmt in einem Punkt $x \in U_1$ ihr Supremum $m \in \{0, \dots, n-1\}$ auf U_1 an. Nach Definition von N existieren demnach eine offene Menge $U \subset U_1$ mit $x \in U$ und $h'_1, \dots, h'_n \in \mathcal{K}(U) \cap \mathcal{C}^1(U)$ mit

$$m = N(x) = \text{rang}\left(\left(\frac{\partial h'_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i, j \leq n}\right).$$

Wählt man U genügend klein, so gibt es also $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{K}(U) \cap \mathcal{C}^1(U)$, sowie eine Indexauswahl

$$\pi : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

(π injektiv) mit

$$(*) \quad \det\left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_{\pi(j)}}(y)\right)_{1 \leq i, j \leq m}\right) \neq 0$$

für alle $y \in U$. Insbesondere ist $N = m$ auf U .

Wieder nach Definition von N ist nun für jede offene Menge $V \subset U$, jedes $h \in \mathcal{K}(V) \cap \mathcal{C}^1(V)$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \pi(\{1, \dots, m\})$

$$D_i(h) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_{\pi(1)}} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{\pi(m)}} & \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_{\pi(1)}} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_{\pi(m)}} & \frac{\partial h_m}{\partial x_i} \\ \frac{\partial h}{\partial x_{\pi(1)}} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_{\pi(m)}} & \frac{\partial h}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

= 0 auf V .

Die Zuordnung

$$u \longmapsto D_i(u)$$

beschreibt einen linearen Differentialoperator erster Ordnung auf U mit stetigen Koeffizientenfunktionen. Wegen (*) ist $D_i \neq 0$, für jede offene Teilmenge V von U und jedes $h \in \mathcal{K}(V) \cap \mathcal{C}^2(V)$ aber

$$L(h) = (L + D_i)(h) = 0,$$

was nach [Bo] Théorème 2.3. (Eindeutigkeit von L) unmöglich ist.

(3.2) Satz. Seien $(X, \mathcal{K}^X)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{K}}^X)$ zwei harmonische Räume mit einer Basis regulärer Mengen auf den offenen Teilmengen X des $\mathbb{R}^n$ und $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$). Sind für ein $k \in \mathbb{N}$ alle auftretenden harmonischen Funktionen k -mal stetig differenzierbar und gibt es im Falle $k=1$ auf X "genügend viele" harmonische $\mathcal{C}^2$ -Funktionen, so ist jede offene harmonische Abbildung

$$\psi : \tilde{X} \longrightarrow X$$

auf einer dichten Teilmenge $\tilde{X}_0$ von $\tilde{X}$ k -mal stetig differenzierbar,

Beweis. Sei X_0 wie in (3.1), $\tilde{X}_0 := \psi^{-1}(X_0)$. Wegen der Stetigkeit und Offenheit von ψ ist $\tilde{X}_0$ eine dichte offene Teilmenge von $\tilde{X}$.

Nach Definition von X_0 gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \tilde{X}_0$ eine offene Umgebung U von $\psi(x_0)$ und n Funktionen $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{K}(U)$ mit

$$\det \left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(y) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) \neq 0$$

für alle $y \in U$.

Wählt man U genügend klein, so definiert

$$\begin{aligned} H : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (h_1(x), \dots, h_n(x)) \end{aligned}$$

einen $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus auf U mit ebenfalls k -mal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $H' : H(U) \rightarrow U$. Auf der offenen Menge $\tilde{U} := \psi^{-1}(U)$ ist

$$\psi = H' \circ H \circ \psi = H' \circ (h_1 \circ \psi, \dots, h_n \circ \psi),$$

d.h. ψ ist nach Voraussetzung auf $\tilde{U}$ k -mal stetig differenzierbar.

§ 4. Isomorphie der Kegel der (feinen) reellwertigen Potentiale

Im folgenden seien $(X, \mathcal{K}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{K}}^*)$ zwei $\mathfrak{F}$ -harmonische Räume mit abzählbarer Basis, P und $\tilde{P}$ inf-stabile, konvexe Unterkegel der Kegel $\mathfrak{P}_{\mathbb{R}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{P}}_{\mathbb{R}}$ aller reellwertigen Potentiale auf X bzw. $\tilde{X}$ mit $\mathcal{P}^C \subset P$, $\tilde{\mathcal{P}}^C \subset \tilde{P}$ und sei

$$\varphi: P \longrightarrow \tilde{P}$$

ein Kegelisomorphismus mit $1 \in P$ und $\varphi(1) = 1$.

Wieder läßt sich φ zu einer Isomorphie φ' der Rieszschen Räume $E := P - P$ und $\tilde{E} := \tilde{P} - \tilde{P}$ fortsetzen; die zu φ' gehörige transponierte Abbildung φ^* ist ein Isomorphismus des Ordnungsdualraumes $\tilde{F} := \tilde{E}_+^* - \tilde{E}_+^*$ von $\tilde{E}$ auf den Ordnungsdualraum $F := E_+^* - E_+^*$ von E .

Wie in § 1. ist $\lambda_{\tilde{X}} := \varphi^*(\varepsilon_{\tilde{X}})$ für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein linearer Verbandshomomorphismus, die Restriktion von $\lambda_{\tilde{X}}$ auf $\mathcal{P}^C$ also nach Lemma (1.7) ein Punktauswertungsfunktional ε_x mit $x := \Psi(\tilde{x}) \in X$. Da aber jedes Potential $p \in P$ Supremum einer aufsteigend filtrierenden Familie $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}^C$ ist, erhalten wir mit (1.2.5) die Gleichung

$$\lambda_{\tilde{X}}(p) = \varphi(p)(\tilde{x}) = \sup_{q \in \mathfrak{F}} \varphi(q)(\tilde{x}) = \sup_{q \in \mathfrak{F}} \varphi^*(\varepsilon_{\tilde{x}})(q) = \sup_{q \in \mathfrak{F}} q(x) = \varepsilon_x(p),$$

also $\varphi^*(\varepsilon_{\tilde{x}}) = \varepsilon_{\Psi(\tilde{x})}$ auf ganz P .

Die Abbildung φ^* bildet daher die Menge $\{\varepsilon_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in \tilde{X}\}$ in die Menge aller Punktauswertungsfunktionale $\{\varepsilon_x : x \in X\}$ ab. Da diese Überlegungen auch auf die Umkehrabbildung φ^{-1} anwendbar sind, existiert eine Bijektion

$$\Psi: \tilde{X} \longrightarrow X$$

mit $\varphi(p) = p \circ \Psi$ für alle $p \in P$.

Wir können daher für die folgenden Überlegungen zur Vereinfachung der Schreibweise $X = \tilde{X}$ (als Mengen), $\Psi = \text{id}$ und $P = \tilde{P}$ annehmen.

Die nächsten Hilfssätze dienen dem Nachweis, daß die Topologie τ des Raumes $(X, \mathcal{K}^*)$ und die Topologie $\tilde{\tau}$ von $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{K}}^*)$ identisch sind. Dann ist nämlich $\mathcal{P}^C = \tilde{\mathcal{P}}^C$, so daß aus Korollar (1.14) die Biharmonizität von Ψ folgt.

(4.1) Lemma. Es existiert eine Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von (X, τ) mit τ -kompakten Mengen und eine Ausschöpfung $(\tilde{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ mit $\tilde{\tau}$ -kompakten

Mengen derart, daß auf $G_n := K_n \cap \tilde{K}_n$ die Topologien τ und $\tilde{\tau}$ übereinstimmen ($n \in \mathbb{N}$).

Jedes G_n ist sowohl τ - als auch $\tilde{\tau}$ -kompakt; die Mengen G_n , $n \in \mathbb{N}$, überdecken den Raum X .

Beweis. Da $\mathcal{P}^C$ und $\tilde{\mathcal{P}}^C$ adaptierte Kegel sind, existieren ein Potential $u \in \mathcal{P}^C$ und ein Potential $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{P}}^C$ derart, daß die Mengen $K_n := \{u \leq n\}$ bzw. $\tilde{K}_n := \{\tilde{u} \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, τ - bzw. $\tilde{\tau}$ -kompakt sind.

Nach Voraussetzung ist $u \in P = \tilde{P}$, $\tilde{u} \in P = \tilde{P}$, daher u $\tilde{\tau}$ -nach unten halbstetig und $\tilde{u}$ τ -nach unten halbstetig, was zur Folge hat, daß K_n $\tilde{\tau}$ -abgeschlossen und $\tilde{K}_n$ τ -abgeschlossen, die Menge G_n also für jedes $n \in \mathbb{N}$ sowohl τ - als auch $\tilde{\tau}$ -kompakt ist.

Wegen der Stetigkeit von u bzw. von $\tilde{u}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge K_n im τ -Innern von K_{n+1} bzw. $\tilde{K}_n$ im $\tilde{\tau}$ -Innern von $\tilde{K}_{n+1}$ enthalten; die Folgen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind also tatsächlich eine Ausschöpfung der Räume (X, τ) bzw. $(X, \tilde{\tau})$. Ferner ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$.

Bleibt noch die Gleichheit der Topologien τ und $\tilde{\tau}$ auf G_n zu zeigen.

Wir beweisen dazu zunächst, daß die Restriktion eines jeden Potentials $p \in \mathcal{P}^C$ auf G_n auch $\tilde{\tau}$ -stetig ist.

In der Tat: Das Potential p gehört nach Voraussetzung zu $\tilde{P}$; es läßt sich also darstellen als Supremum einer aufsteigend filtrierenden Familie $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{P}}^C$. Da p τ -stetig, G_n τ -kompakt und jedes $q \in \mathcal{F}$ τ -nach unten halbstetig ist, konvergiert nach dem Satz von Dini $\mathcal{F}$ gleichmäßig gegen p auf G_n , was die $\tilde{\tau}$ -Stetigkeit von $p|_{G_n}$ nach sich zieht.

Damit haben wir die Inklusion $\mathcal{P}^C|_{G_n} \subset \mathcal{C}((G_n, \tilde{\tau}))$ nachgewiesen.

Nun aber ist wegen der $\mathcal{P}$ -Harmonizität von $(X, \mathcal{K}^*)$ die Topologie τ auf G_n gerade die initiale Topologie bezüglich $\mathcal{P}^C|_{G_n}$, was zur Folge hat, daß τ auf G_n größer als $\tilde{\tau}$ ist.

Aus Symmetriegründen stimmen daher die beiden Topologien auf G_n überein.

- (4.2) Lemma. (1) Es ist $\mathcal{H}_+^*(X) = \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$.
- (2) Die feine Topologie von $(X, \mathcal{H}^*)$ ist gleich der feinen Topologie von $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$.
- (3) Für jede Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathcal{H}_+^*(X) = \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$ ist die Regularisierte $\bigwedge \mathcal{F}$ von $p := \inf \mathcal{F}$ bezüglich beider Topologien τ und $\tilde{\tau}$ gleich.
- (4) Für jede numerische Funktion $f \geq 0$ auf X stimmen die Reduzierten Rf und $\tilde{R}f$, sowie die Gefegten $\hat{R}f$ und $\tilde{\hat{R}}f$ von f bezüglich der beiden harmonischen Strukturen überein.

Beweis. Die global definierten, positiven hyperharmonischen Funktionen beider Räume sind genau die punktwisen Suprema beliebiger aufsteigend filtrierender Teilfamilien von $P = \tilde{P}$. Daher ist die Behauptung (1) richtig.

Da in den $\mathcal{P}$ -harmonischen Räumen X und $\tilde{X}$ die feinen Topologien gerade die initialen Topologien bezüglich $\mathcal{H}_+^*(X) = \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$ sind, ergibt sich (2) aus (1).

Schließlich ist - unabhängig von den Topologien τ und $\tilde{\tau}$ - die Regularisierte von p in (3) das Infimum von $\mathcal{F}$ in dem vollständigen Verband $\mathcal{H}_+^*(X) = \tilde{\mathcal{H}}_+^*(\tilde{X})$, versehen mit der natürlichen Ordnung.

Die Behauptung (4) ist dann eine unmittelbare Folge von (1) und (3).

Wir zeigen nun stufenweise, daß gewisse ausgezeichnete Unterkegel der Kegel P und $\tilde{P}$ übereinstimmen. Dazu erinnern wir an die folgende

- (4.3) Definition. Ein Potential p heißt semi-beschränkt, wenn es sich darstellen läßt als eine abzählbare Summe von lokal-beschränkten Potentialen, i.Z. $p \in \mathcal{P}_b$.

Nach [Fu] 2.1 und 2.2 ist ein Potential p genau dann semi-beschränkt, wenn $\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} \hat{R}_p^{\{p > \lambda\}} = 0$ gilt. Mit dieser Kennzeichnung und Lemma (4.2) erhalten wir

- (4.4) Lemma. Die Menge $\mathcal{P}_b'$ aller semi-beschränkten Potentiale $p \in P$ von $(X, \mathcal{H}^*)$ stimmt überein mit der Menge $\tilde{\mathcal{P}}_b'$ aller semi-beschränkten Potentiale $\tilde{p} \in \tilde{P}$ bezüglich $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$.

(4.5) Lemma. Die Menge $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \cap P$ aller Potentiale in P , welche sich als abzählbare Summe von stetigen, reellwertigen Potentialen darstellen lassen, ist gleich der entsprechenden Menge $\tilde{\mathcal{M}}' := \tilde{\mathcal{M}} \cap \tilde{P}$.

Beweis. Da für jede Folge $(\tilde{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{\mathcal{M}}'$ mit $\tilde{p} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{p}_n \in \tilde{P}$ die Summe $\tilde{p}$ wieder in $\tilde{\mathcal{M}}'$ liegt, genügt es aus Symmetriegründen zu zeigen, daß der Kegel $\mathcal{P}^c$ in $\tilde{\mathcal{M}}'$ enthalten ist.

Sei also $u \in \mathcal{P}^c \subset P = \tilde{P}$. Nach [B] Korollar 2.4.5. ist mit den Bezeichnungen von Lemma (4.1) für jedes semi-beschränkte Potential $p \in \mathcal{P}'_b = \tilde{\mathcal{P}}'_b$ (man beachte (4.2.4))

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} R_p [K_n] = 0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} R_p [\tilde{K}_n].$$

Nach (4.1) enthält das System $\tilde{\mathcal{K}}(u)$ aller $\tilde{\tau}$ -kompakten Mengen $\tilde{K} \subset \tilde{X}$ mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von u auf $\tilde{K}$ $\tilde{\tau}$ -stetig ist, jede der Mengen G_n . Daher gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{n \in \mathbb{N}} (R_p [K_n] + R_p [\tilde{K}_n]) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} R_p [K_n \cup \tilde{K}_n] = \inf_{n \in \mathbb{N}} R_p [G_n] \geq \\ &\geq \bigwedge_{\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{K}}(u)} R_p [\tilde{K}] \geq 0. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit von $\bigwedge_{\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{K}}(u)} R_p [\tilde{K}] = 0$ für jedes $p \in \mathcal{P}'_b = \tilde{\mathcal{P}}'_b$ besagt, daß das Potential u quasi-stetig ist (vgl. [CC] Definition § 8.4., Prop. 8.4.1.) bzgl. $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{K}}^*)$. Nun aber ist $\tilde{\mathcal{M}}'$ gerade die Menge aller quasi-stetigen, semi-beschränkten Potentiale $\tilde{p} \in \tilde{P}$ in $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{K}}^*)$ ([CC] Cor. 8.4.1.), so daß wegen Lemma (4.4) das Potential u tatsächlich in $\tilde{\mathcal{M}}'$ enthalten ist.

(4.6) Lemma. Der Kegel $Q := \mathcal{P}^c \cap \tilde{\mathcal{P}}^c$ aller reellwertigen Potentiale, die sowohl bezüglich der Topologie τ als auch bezüglich der Topologie $\tilde{\tau}$ stetig sind, trennt die Punkte von X und enthält die positiven Konstanten.

Beweis. Da $(X, \mathcal{K}^*)$ ein $\mathcal{P}$ -harmonischer Raum ist, existiert zu $x, y \in X, x \neq y$, ein Potential $p \in \mathcal{P}^c$ mit $p(x) \neq p(y)$. Wegen $\mathcal{P}^c \subset \tilde{P}$ und Lemma (4.5) ist $p \in \tilde{\mathcal{M}}'$, also darstellbar als $p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{p}_n$ mit $\tilde{p}_n \in \tilde{\mathcal{P}}^c, n \in \mathbb{N}$.

Jedes $\tilde{p}_n$ ist aber wegen $\tilde{p}_n \prec p$ auch τ -stetig, also in Q enthalten. Aus $p(x) \neq p(y)$ folgt $\tilde{p}_n(x) \neq \tilde{p}_n(y)$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$.

(4.7) Lemma. Für jede $\tilde{\tau}$ -kompakte Menge K ist die Spurtopologie $\tilde{\tau}|_K$ von $\tilde{\tau}$ auf K gröber als die Spurtopologie $\tau|_K$ von τ auf K . Ferner ist K τ -abgeschlossen in X .

Beweis. Nach Lemma (4.6) ist $(Q - Q)|_K$ ein punktetrennender Untervektorverband von $\mathcal{V}((K, \tilde{\tau}))$, welcher die Konstanten enthält; $(Q - Q)|_K$ liegt also dicht in $\mathcal{V}((K, \tilde{\tau}))$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Nach Definition von Q ist $\mathcal{V}((K, \tilde{\tau}))$ daher enthalten im Raum $\mathcal{V}((K, \tau))$ aller τ -stetigen Funktionen auf K , woraus wegen der vollständigen Regularität der Topologie $\tilde{\tau}|_K$ die erste Behauptung folgt. Angenommen, K wäre nun nicht τ -abgeschlossen. Dann existiert ein Punkt $x \in X \setminus K$, der im τ -Abschluß von K liegt. Wir wenden jetzt den ersten Teil des Satzes auf die $\tilde{\tau}$ -kompakte Menge $K' := K \cup \{x\}$ an. Da K $\tilde{\tau}$ -kompakt ist, ist $\{x\}$ offen in der Topologie $\tilde{\tau}|_{K'}$, also erst recht in der Topologie $\tau|_{K'}$. Dies aber steht im Widerspruch zur Wahl von x .

(4.8) Lemma. Q enthält den Kegel $\tilde{\mathcal{P}}_0^c$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale von $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{K}}^*)$, welche außerhalb einer kompakten Menge harmonisch sind.

Beweis. Sei $p \in \tilde{\mathcal{P}}_0^c$ mit einem $\tilde{\tau}$ -kompakten superharmonischen Träger $\tilde{S}(p)$. Ferner sei $\tilde{f}$ eine $\tilde{\tau}$ -stetige Funktion mit $\tilde{\tau}$ -kompaktem Träger K und den Eigenschaften $0 \leq \tilde{f} \leq p$, $\tilde{f} = p$ auf $\tilde{S}(p)$. Die Potentiale in $\tilde{\mathcal{P}}_0^c$ genügen dem Dominationsprinzip, d.h. es ist

$$p = \hat{R}_p^{\tilde{S}(p)},$$

und damit wegen $\hat{R}_p^{\tilde{S}(p)} \leq R\tilde{f} \leq p$

$$p = R\tilde{f}.$$

Da $\tilde{f}$ auf dem Komplement von K die Nullfunktion ist, und da K wegen Lemma (4.7) τ -abgeschlossen ist, gehört $p|_K$ zu $\mathcal{H}(K)$. Insbesondere enthält K also auch den superharmonischen Träger $S(p)$ von p bezüglich des harmonischen Raumes $(X, \mathcal{H}^*)$. Wiederum nach Lemma (4.7) ist die Restriktion von p auf K und damit auf $S(p)$ τ -stetig. Wegen $p \in \mathcal{H}'$ und [CC] Cor. 8.3.1 folgt hieraus die τ -Stetigkeit von p auf ganz X . Damit ist $p \in Q$ nachgewiesen.

Wegen der $\mathcal{P}$ -Harmonizität des Raumes $(\tilde{X}, \mathcal{H}^*)$ ist seine Topologie die initiale Topologie bezüglich $\tilde{\mathcal{P}}_0^c$. Lemma (4.8) besagt, daß diese Topologie $\tilde{\tau}$ gröber als die initiale Topologie τ_Q bezüglich Q ist. Die Topologie τ_Q ihrerseits ist nach Definition von Q gröber als die Topologie τ von $(X, \mathcal{H}^*)$, so daß aus Symmetriegründen $\tilde{\tau} = \tau$ gilt. Insbesondere erhalten wir damit

(4.9) Lemma. Es ist $\mathcal{P}^c = \tilde{\mathcal{P}}^c$.

Wenden wir nun die Ergebnisse des § 1. auf unsere Situation an, so ergibt sich

(4.10) Satz. Zu jedem Kegelisomorphismus $\varphi: P \longrightarrow \tilde{P}$ mit $1 \in P$ und $\varphi(1) = 1$ existiert genau eine biharmonische Abbildung $\psi: \tilde{X} \longrightarrow X$ mit $\varphi(p) = p \circ \psi$ für alle $p \in P$.

Insbesondere sind also zwei $\mathcal{P}$ -harmonische LKAB-Räume dann biharmonisch aufeinander abbildbar, wenn es einen Kegelisomorphismus φ zwischen den Kegeln $\mathcal{P}_R$ und $\tilde{\mathcal{P}}_R$ aller endlichen Potentiale gibt mit $\varphi(1) = 1$.

Allerdings ist die Voraussetzung $\varphi(1) = 1$ ziemlich unnatürlich. In § 1. konnte sie für einen beliebigen Kegelisomorphismus zwischen den Kegeln $\mathcal{P}^c$ und $\tilde{\mathcal{P}}^c$ immer durch Division des Garbendatums $\mathcal{H}^*$ mit einem strikt positiven, stetigen Potential p und durch Division von $\mathcal{H}^*$ mit $\varphi(p)$ herbeigeführt werden.

Bei einem Kegelisomorphismus $\varphi: P \longrightarrow \tilde{P}$ zwischen zwei Kegeln P und $\tilde{P}$ mit den zu Beginn des § 4. genannten Eigenschaften ist ein analoges Vorgehen genau dann möglich, wenn es

ein strikt positives, stetiges Potential $p \in P$ gibt, dessen Bild $\varphi(p)$ ebenfalls stetig ist.

In einem Spezialfall läßt sich die Existenz eines solchen Potentials nachweisen :

(4.11) Satz. Sei φ ein Kegelisomorphismus zwischen den Kegeln aller feinen reellwertigen Potentiale zweier $\mathcal{P}$ -harmonischer Räume $(X, \mathcal{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ mit Axiom (D) und abzählbarer Basis. Dann existiert eine strikt positive, stetige Funktion $\tilde{f}$ auf $\tilde{X}$ und eine biharmonische Abbildung ψ zwischen den harmonischen Räumen $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*_{\tilde{f}})$ und $(X, \mathcal{H}^*)$ mit $\varphi(p) = \tilde{f} \cdot (p \circ \psi)$ für jedes feine reellwertige Potential p .

Beweis. Die Menge aller feinen reellwertigen Potentiale auf X bzw. auf $\tilde{X}$ ist nach [Fu] Cor. p. 111 gerade gleich $\mathcal{P}_b \cap \mathcal{P}_e$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}_b \cap \tilde{\mathcal{P}}_e$, enthält also insbesondere die Kegel $\mathcal{P}^c$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}^c$.

Sei nun $p \in \mathcal{P}^c$ ein strikt positives, stetiges Potential. Da $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ das Dominationsaxiom erfüllt und $\varphi(p)$ semi-beschränkt ist, erhalten wir $\varphi(p) \in \tilde{\mathcal{H}}$. Es existiert demnach eine Folge $(\tilde{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{\mathcal{P}}^c$ mit $\varphi(p) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{p}_n$.

Entsprechend läßt sich p schreiben als $p = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n$ mit $p_n = \varphi^{-1}(\tilde{p}_n)$.

Die Gültigkeit von Axiom (D) impliziert die Elliptizität der beiden harmonischen Räume, so daß jedes der Potentiale p_n entweder verschwindet oder strikt positiv ist.

Zudem ist jedes Potential p_n wegen $p_n < p$ stetig und wird durch φ auf das stetige Potential $\tilde{p}_n$ abgebildet. Wegen $p \neq 0$ ist mindestens ein $p_n \neq 0$. Aus der Bijektivität von φ ergibt sich dann $\varphi(p_n) \neq 0$.

Analoge Schlüsse wie im Beweis von (1.14) führen nun unter Beachtung von (4.10) zum Ziel.

Literatur

=====

- [B] H. BAUER : Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie; LN 22, Springer, Berlin (1966).
- [Bo] J.-M. BONY : Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel; Potential theory, pp. 69 - 119 (CIME, 1^o, Stresa 2 - 10 Luglio 1969). Roma: Edizioni Cremonese 1970.
- [Ch] G. CHOQUET : Le problème des moments; Séminaire Choquet, 1^{ère} année (1962), No. 4.
- [CC₁] C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA : Compactifications of harmonic spaces; Nagoya Math. J. 25, pp. 1 - 57, (1965).
- [CC] C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA : Potential Theory on Harmonic Spaces; Die Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarstellungen, Bd. 158, Springer, Berlin (1972).
- [Fu] B. FUGLEDE : Finely harmonic functions; LN 289, Springer, Berlin (1972).
- [J] G. JAMESON : Ordered Linear Spaces; LN 141, Springer, Berlin (1970).

Lebenslauf

=====

Am 8. April 1950 wurde ich in Nürnberg geboren. Meine Eltern sind der Drogist Friedrich Pirl und seine Ehefrau Marianne, geb. Schenkel. In den Jahren 1956 bis 1960 besuchte ich die Volksschule der Wilhelm-Löhe-Schule Nürnberg und anschließend bis 1969 den neusprachlichen Zweig des Gymnasiums derselben Schule.

Nach bestandener Reifeprüfung im Juli 1969 begann ich im Herbst dieses Jahres an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg das Studium der Mathematik und Physik. Am 27. Mai 1971 heiratete ich Herrn Horst Schirmeier. Nach dem Vorexamen im Herbst 1971 wurde ich als studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut angestellt. Im Februar 1974 legte ich die Diplomprüfung in Mathematik ab. Während meines Studiums hörte ich Vorlesungen bei den Professoren H. Bauer, H. Berens, Huber, Jacobs, L. Kaup, Kölzow, Nöbeling und Wegener.

Seit 1974 bin ich Doktorandin bei Herrn Professor Heinz Bauer.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990